

演習(1)解答例

1. $v = \frac{g}{k} + v_0 e^{-kt}$ は微分方程式 $\frac{dv}{dt} + kv = g$ の解の 1 つであることを確かめなさい (v_0 は定数). [2 点]

【解】 微分方程式の左辺に代入して右辺になることを示せばよい.

$$\frac{dv}{dt} = -kv_0 e^{-kt} \quad [1 \text{ 点}]$$

であるから,

$$(\text{左辺}) = -kv_0 e^{-kt} + k\left(\frac{g}{k} + v_0 e^{-kt}\right) = g = (\text{右辺}) \quad [+1 \text{ 点}]$$

よって, 与えられた関数は微分方程式の解になっている.

2. 【問 1.2 の(2)】 $y = x^2(C_1 + C_2 \log x)$ の任意定数 C_1 と C_2 を消去して y の満たすべき微分方程式を作りなさい. [3 点]

【解】 $\frac{y}{x^2} = C_1 + C_2 \log x$ としてから, 両辺を微分すると

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \frac{C_2}{x} \quad [1 \text{ 点}]$$

これより, $C_2 = x\left(\frac{y}{x^2}\right)' = x \frac{x^2 y' - 2xy}{x^4} = \frac{xy' - 2y}{x^2}$ となる [+1 点]. この式の両辺を x で微分すれば,

$$0 = \left(\frac{xy' - 2y}{x^2}\right)' = \frac{x^2(xy' - 2y)' - 2x(xy' - 2y)}{x^4} = \frac{x^2 y'' - 3xy' + 4y}{x^3}$$

すなわち,

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad [+1 \text{ 点}]$$

が成り立つ. これが求める微分方程式である.