

演習(10)解答例

1. 次のオイラーの微分方程式を $x = e^t$ と変数変換することによって解きなさい。

$$x^2 y'' + y = \log x$$

【解】 $x = e^t$ とおくと,

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = e^{-t} \frac{d}{dt}$$

だから,

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{d}{dt} \right) = e^{-2t} \frac{d^2}{dt^2} - e^{-2t} \frac{d}{dt}.$$

与式は次のように変換される.

$$\ddot{y} - \dot{y} + y = t \quad (1 \text{ 点})$$

同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (+1 \text{ 点})$$

同次方程式の基本解は $\left\{ e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t, e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right\}$ である (+1 点). 非同次方程式の特殊解を $y =$

$At + B$ とおいて代入すれば,

$$-A + At + B = t, \quad A = 1, \quad B = 1$$

が得られる. すなわち, 特殊解は $y = t + 1$ (+1 点). $t = \log x$ として, 変数を x に戻せば,

$$y = \sqrt{x} \left\{ C_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x \right) + C_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x \right) \right\} + \log x + 1 \quad (+1 \text{ 点})$$