演習(2)解答例

１．【問 2.1 の(2)】微分方程式 $xy\dfrac{dy}{dx}=1$ を解きなさい．［2 点］

【解】$x\neq 0$ として変数分離すると

$$ydy=\frac{1}{x}dx\text{，これより，}\int ydy=\int\frac{dx}{x}\text{．［1 点］}$$

すなわち，

$$\frac{1}{2}y^2=\log|x|+\frac{C}{2}\text{（}C\text{ は積分定数）ゆえに，}y^2=2\log|x|+C\text{［+1 点］}$$

（最初の式で積分定数を $C/2$ としたのは，次に 2 倍することを考慮してのこと．積分定数は任意なので，C だろうが $2C$ だろうがかまわないが，最終結果が単純になるようにした）

２．【問 2.3 の(2)】微分方程式 $\left(1+\dfrac{y}{x}\right)y'=\dfrac{y^2}{x^2}$ の一般解を求め，次に初期条件 $y(1)=1$ を満たす特殊解を求めなさい．［3 点］

【解】同次形なので，$y/x=u$ とおいて，u に関する微分方程式に変換する． $y'=xu'+u$ を代入すれば，

$$(1+u)(xu'+u)=u^2\text{．これを整理すると，}x(1+u)u'+u=0\text{．}$$

変数分離すると

$$\frac{1+u}{u}du=-\frac{dx}{x}\text{，これより，}\int\frac{1+u}{u}du=-\int\frac{dx}{x}\text{［1 点］}$$

したがって，

$$\log|u|+u=-\log|x|+C'\text{（}C'\text{は積分定数），すなわち，}\log|ux|=-u+C'$$

これより，

$$|ux|=|y|=e^{-u+C'}=e^{C'}e^{-u}=e^{C'}e^{-y/x}\text{，ゆえに，}y=\pm e^{C'}e^{-y/x}=Ce^{-y/x}\text{（一般解）［+1 点］}$$

ここで，$C=\pm e^{C'}$ とおいた（C も任意定数となる）．初期条件 $y(1)=1$ を課せば，定数 C が決まる． $1=Ce^{-1}$，すなわち， $C=e$，よって特殊解は $y=e^{1-\frac{y}{x}}$ である．［+1 点］