

演習(3)解答例

1. 【問 2.5 の(2)】 次の微分方程式の一般解と、与えられた条件を満たす特殊解を求めなさい. [3 点]

$$(2x-y)y' = 2x-y+4, \quad y(0)=0$$

【解】 $2x-y=u$ と置くと, $2-y'=u'$ より, 与式は次のように変換される.

$$u(2-u')=u+4, \quad u(0)=0$$

これより,

$$u' = 2 - \frac{u+4}{u}, \quad u' = \frac{u-4}{u} \quad [1 \text{ 点}]$$

変数分離して積分すると ($u=4$ は上の式を満たすが, 初期条件を満たさないので $u \neq 4$ と
して, $u-4$ で割ってよい),

$$\int \frac{u}{u-4} du = \int dx, \quad \int \left(1 + \frac{4}{u-4}\right) du = x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$u + 4 \log|u-4| = x + C$, 変数を戻して整理すると, $(4-2x+y)^4 = Ce^{y-x}$ [+1 点], 初期条件を代入すると, $C = 4^4 = 256$, すなわち

$$(4-2x+y)^4 = 256e^{y-x} \quad [+1 \text{ 点}]$$

2. 積分因子を求めて次の微分方程式を解きなさい. [2 点]

$$y' + \frac{1}{x}y = x$$

【解】 積分因子は $\exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = \exp(\log|x|) = |x|$ となるが, x でも $-x$ でも与式に乘じる時には

本質的な違いはないので, x として計算する [1 点]. 与式の両辺に x を乗じて変形すると,

$$xy' + y = x^2, \quad (xy)' = x^2$$

x で積分すると

$$xy = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x} \quad [+1 \text{ 点}]$$