# 演習(4)解答例

１．【問 3.3 の(1)】を解きなさい.

(1) $y' + y = 0$ の一般解を求めなさい.

(2) $y' + y = xe^{-2x}$ の特殊解 $v(x)$を**定数変化法によって**１つ求めなさい.

(3) $y' + y = xe^{-2x}$ の一般解を求めなさい.

【解】

(1) 与式を変数分離して積分すると

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx \quad \text{すなわち} \quad \log|y| = -x + c$$ （$c$: 積分定数）［1 点］

$$|y| = e^{-x+c} = e^c e^{-x}, \quad y = \pm e^c e^{-x} = Ce^{-x}$$ （$\pm e^c = C$ と置いた．$C$ も任意定数）［+1 点］

(2) 特殊解を $v(x) = C(x)e^{-x}$ （$C(x)$は $x$ の関数）と置くと,

$$v'(x) = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}$$

非同次方程式に代入すると

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = xe^{-2x}, \quad C'(x)e^{-x} = xe^{-2x}$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \int x\left(-e^{-x}\right)' dx = -xe^{-x} - \int \left(-e^{-x}\right)dx = -(x+1)e^{-x}$$ ［1 点］

よって

$$v(x) = -(x+1)e^{-2x}$$ ［+1 点］

(3) 非同次方程式の一般解は，同次方程式の一般解 $Ce^{-x}$ に非同次方程式の特殊解 $-(x+1)e^{-2x}$ を加えたものだから,

$$y = Ce^{-x} - (x+1)e^{-2x}$$

である．［1 点］