

演習(5)解答例

1. 次の微分方程式はリッカチの微分方程式である. () 内の関数が特殊解であることを利用して一般解を求めなさい.

$$y' - \frac{1}{x^2}y^2 + \frac{1}{x}y = 1 \quad (y = x)$$

【解】 $y = u + x$ とおいて, 与式を u に関する微分方程式に変換する.

$$u' + 1 - \frac{1}{x^2}(u+x)^2 + \frac{1}{x}(u+x) = 1$$

展開して整理すると

$$u' - \frac{u^2}{x^2} - \frac{u}{x} = 0, \text{ すなわち, } u' - \frac{u}{x} = \frac{u^2}{x^2} \quad [\text{ここまでに 1 点}]$$

これはベルヌーイの微分方程式である. $u \neq 0$ として両辺を u^2 で割ると

$$\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{x} \frac{1}{u} = \frac{1}{x^2} \quad [+1 \text{ 点}]$$

$v = \frac{1}{u}$ と置いて v に関する微分方程式に変換すると, $v' = -\frac{1}{u^2}u'$ だから

$$-v' - \frac{1}{x}v = \frac{1}{x^2}, \text{ すなわち, } v' + \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x^2} \text{ あるいは } xv' + v = -\frac{1}{x} \quad [+1 \text{ 点}]$$

これは

$$(xv)' = -\frac{1}{x}$$

と書けるので, 積分すると (積分定数を C とする)

$$xv = -\log|x| + C \quad [+1 \text{ 点}], \text{ すなわち, } v = \frac{-\log|x| + C}{x}, \quad u = \frac{x}{-\log|x| + C}$$

したがって求める解は

$$y = \frac{x}{-\log|x| + C} + x = x \left(1 + \frac{1}{C - \log|x|} \right). \quad [+1 \text{ 点}]$$