

演習(6)解答例

1. 微分方程式 $(x^2 - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$ の積分因子を求め、この微分方程式の一般解を求めなさい.

【解】 $P = x^2 - 2xy^3$, $Q = 3x^2y^2$ とおくと, $P_y - Q_x = -6xy^2 - 6xy^2 = -12xy^2$ となるので,
 $\frac{P_y - Q_x}{Q} = -\frac{4}{x}$ と x のみの関数になる. 積分因子は $\exp\left[\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx\right] = \exp\left[-\int \frac{4}{x} dx\right] = \frac{1}{x^4}$ である. (3 点)

次に、与式にこの積分因子を乗じると

$$\frac{1}{x^2} dx - \frac{2y^3}{x^3} dx + 3 \frac{y^2}{x^2} dy = 0$$

$$\frac{1}{x^2} dx + y^3 d\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2} d(y^3) = 0$$

$$d\left(-\frac{1}{x} + \frac{y^3}{x^2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^3}{x^2} = C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \text{あるいは} \quad y^3 - x = Cx^2 \quad (+2 \text{ 点})$$