

演習(7)解答例

1. 次のクレローの微分方程式を解きなさい. ただし, $p = y'$ とする.

$$y = px + \sin p$$

【解】

与式を x で微分すると,

$$y' = p = p + p'x + p' \cos p$$

$$p'(x + \cos p) = 0 \quad [1 \text{ 点}]$$

これより,

$$(1) p' = 0 \quad [1 \text{ 点}], \text{ あるいは } (2) x = -\cos p \quad [1 \text{ 点}]$$

(1)より, $p = C$ (定数). これを与式に代入すれば

$$y = Cx + \sin C \quad (\text{一般解}) [1 \text{ 点}]$$

(2)より, 与式の x に代入すると,

$$y = -p \cos p + \sin p$$

すなわち, p をパラメータとして, x と y の関係が

$$x = -\cos p, \quad y = -p \cos p + \sin p$$

で与えられる (特異解) [1 点].

特異解については, パラメータ表示ではなくて, さらに踏み込んで実際に関数形を示した人もいた. すなわち,

$$p = \cos^{-1}(-x), \quad \sin p = \sqrt{1 - \cos^2 p} = \sqrt{1 - x^2}$$

として,

$$y = x \cos^{-1}(-x) + \sqrt{1 - x^2} .$$