演習(8)解答例

１．次の初期値問題について考える。

$$y'' + 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$$

(a) 特性方程式を解いて，基本解を求めなさい。

(b) 基本解の線形結合として一般解を求めなさい。

(c) 初期条件を満たすように未定定数を決めて，初期値問題の特殊解を求めなさい。

【解】

(a) 特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ で，その解は $-1 \pm 2i$（共役複素数解）である．したがって，基本解は $\{e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\sin 2x\}$ である．［2 点］

(b) 一般解は

$$y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x$$ （C_1，C_2 は任意定数）［1 点］

(c) (b)の結果より，$y' = C_1\left(-e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x\right) + C_2\left(-e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x\right)$

$$y(0) = C_1 = 1,$$

$$y'(0) = -C_1 + 2C_2 = 0,$$ これより $C_2 = \frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{2}$

求める初期値問題の解は

$$y = e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x = e^{-x}\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$ ［2 点］