演習(10)解答例

１．$\boldsymbol{F} = [e^x \sin y, e^x \cos y, \cos z]$，曲面 S を円柱 $x^2 + y^2 \le 4, -2 \le z \le 2$ の表面としたとき，面積分 $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA$ をガウスの発散定理を用いて計算しなさい．ただし，面 S は発散定理の仮定のように向きづけられているものとする．

【解】面 S を境界とする円柱を T とする．

$$div\boldsymbol{F} = e^x \sin y - e^x \sin y - \sin z = -\sin z$$ （ここまで 2 点）

となるから，ガウスの発散定理より

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA = \iiint_T (-\sin z) dxdydz = \iint \left(\int_{-2}^{2} (-\sin z) dz \right) dxdy = \iint [\cos z]_{-2}^{2} dxdy = 0$$ （+3 点）

積分計算において，適宜，途中点を与えた．