

演習(3)解答例

1. ①～⑤で示された空白の部分に正しく記入して完成させなさい.

以下の手順で、極座標表示された曲線 $r = r(\theta)$ の曲線の弧の長さを求める公式を導くことを考える.

極座標 (r, θ) と (x, y) の関係は $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ なので,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \textcircled{1} \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \quad (1 \text{ 点})$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \textcircled{2} \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \quad (1 \text{ 点})$$

これより、線素を ds とすれば

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left\{ \textcircled{3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right\} (d\theta)^2 \quad (1 \text{ 点})$$

の関係が得られる. したがって、角 $\theta = \alpha$ から $\theta = \beta$ ($\alpha < \beta$) までの曲線の弧の長さ l は

$$l = \int ds = \textcircled{4} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2} d\theta \quad (1 \text{ 点})$$

で与えられる.

この公式を適用して、カルジオイド (心臓形) $r = a(1 - \cos\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) の全長を計算すると,

$$l = \textcircled{5} 8a \quad (1 \text{ 点})$$

が得られる.