演習(4)解答例

１．曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上の点 P: (3, 4, 5)における単位法線ベクトルを２つ求めなさい．

２．点 P: (1, 2, 3)におけるスカラー関数 $f=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ の $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ の方向の方向微分係数 $D_{\boldsymbol{a}}f$ を求めなさい．

【解】

１． $f=\sqrt{x^2+y^2}-z$ とおけば，grad$f$ は面 f = const.に対する法線ベクトルを与える．

$$\mathrm{grad}f=\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right]$$ より， $$\mathrm{grad}f\big|_{\mathrm{P}}=\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\right]$$ （ここまで 1 点）

ここで， $\mathrm{grad}f\big|_{\mathrm{P}}$ のノルムを計算すると $\left|\mathrm{grad}f\big|_{\mathrm{P}}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ だから，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}[3,4,-5]$$ （+1 点）

２．まず， $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{14}$ より $\boldsymbol{a}$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}=\frac{1}{\sqrt{14}}[1,2,3]$ である（1 点）．また，

$$\mathrm{grad}f=\left[\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right]$$

より，P における値は $\mathrm{grad}f\big|_{\mathrm{P}}=\left[\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right]$ となるから（+1 点），方向微分係数 $D_{\boldsymbol{a}}f$ は $\boldsymbol{a}$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いた式 $D_{\boldsymbol{b}}f$ で求められる．

$$D_{\boldsymbol{b}}f=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{grad}f\big|_{P}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$ （+1 点）