

演習(5)解答例

1. \mathbf{v} をベクトル関数, f をスカラー関数として, 次の公式を証明しなさい.

(a) $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{v}) = 0$

(b) $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}f) = \mathbf{0}$

【解】 (a) curl と div の定義に従って忠実に計算する。 $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ とすると

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0. \quad [3 \text{ 点}]$$

(b) 例えば x 成分について計算すると,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

y, z 成分についても同様なので, 与式が証明された。[2 点]