演習(6)解答例

１．ベクトル関数 $\boldsymbol{F} = [x - y, y - z, z - x]$，積分路 C: $\boldsymbol{r} = [2\cos t, t, 2\sin t]$ $(0 \le t \le 2\pi)$として，線積分 $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を計算しなさい．

【解】 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = [2\cos t - t, t - 2\sin t, 2\sin t - 2\cos t]$（1 点），$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = [-2\sin t, 1, 2\cos t]$（+1 点）より，線積分の定義式から

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \{(2\cos t - t)(-2\sin t) + (t - 2\sin t) + (2\sin t - 2\cos t) \cdot 2\cos t\} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (2t\sin t + t - 2\sin t - 4\cos^2 t) dt \quad \text{（+1 点）}$$

$$= \left[-2t\cos t + 2\sin t + \frac{1}{2}t^2 + 2\cos t - 2t - \sin 2t \right]_0^{2\pi} \quad \text{（+1 点）}$$

$$= -4\pi + 2\pi^2 - 4\pi = 2\pi^2 - 8\pi \quad \text{（+1 点）}$$