演習(7)解答例

１．次の線積分において積分記号の中の微分形式が空間内で完全であることを示し，積分の値を計算しなさい．

$$\int_{(\pi,\pi/2,2)}^{(0,\pi,1)}\left(-z\sin xzdx+\cos ydy-x\sin xzdz\right)$$

【解】完全性については，定理３に基づいて curl$\boldsymbol{F}$ が $\mathbf{0}$ であることを示せばよい．

$\boldsymbol{F} = [-z\sin xz, \cos y, -x\sin xz]$ であるから，$F_1 = -z\sin xz$, $F_2 = \cos y$, $F_3 = -x\sin xz$．curl$\boldsymbol{F}$ の各成分は

$$(\mathrm{curl}\boldsymbol{F})_x=\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}=0-0=0$$

$$(\mathrm{curl}\boldsymbol{F})_y=\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}=-\sin xz-xz\cos xz-\left(-\sin xz-xz\cos xz\right)=0$$

$$(\mathrm{curl}\boldsymbol{F})_z=\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=0-0=0$$

となり，定理３より完全性が示された．（２点，適宜部分点を与える）

この結果より，与えられた線積分は積分路に無関係で，始点と終点のみで決まる．次に，ポテンシャル f を決める．条件は

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-z\sin xz\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\cos y\,,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-x\sin xz$$

である．第１式を x で積分すると，y，z は定数扱いなので，

$$f=\cos xz+g(y,z)$$

第３式に代入すると $\frac{\partial g}{\partial z}=0$ なので，g は z を含まず，y のみの関数ということになる．

$$f=\cos xz+g(y)$$

これを第２式に代入して，$g'(y)=\cos y$ すなわち，$g(y)=\sin y$．$f=\cos xz+\sin y$．

$$\int_{(\pi,\pi/2,2)}^{(0,\pi,1)}\left(-z\sin xzdx+\cos ydy-x\sin xzdz\right)=\left[\cos xz+\sin y\right]_{(\pi,\pi/2,2)}^{(0,\pi,1)}=1-(1+1)=-1$$

（３点，部分点を適宜与える）