

演習(8)解答例

1. 半径 r_2 の円から半径 r_1 の同心円 ($r_2 > r_1$) を切り抜き、中心を通る直線で 2 分割した図形の一方について考える. 元の円の中心から図心の位置までの距離を計算しなさい.

【解】図形の中心を原点 O , 分割線に沿って x 軸, それに垂直に y 軸を取る. 図形の領域を R として, R 上での二重積分を行う. このとき, 領域の形状から極座標を用いるのが便利である. また, 対称性から図心が y 軸上にあることは明らかである.

まず, 図形の面積は $S = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2)$ である. (1 点)

極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ への変換のヤコビアンは r であるから, 図心の公式より

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{S} \iint_R y dx dy = \frac{1}{S} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\pi r \sin\theta \cdot r dr d\theta = \frac{2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \quad (+2 \text{ 点}) \\ &= \frac{2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{3} (r_2^3 - r_1^3) \cdot 2 = \frac{4}{3\pi} \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{4}{3\pi} \frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2 + r_1} \quad (+2 \text{ 点})\end{aligned}$$

適宜、途中点を与える. 最後から 2 番目の式まででも可とする.