演習(9)解答例

１．流束積分 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{F} = [y^3, x^3, z^3]$, S: $x^2 + 4y^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq h$)とする．

【解】曲面 S のパラメータ表示を $\boldsymbol{r} = [\cos u, (1/2)\sin u, v]$（$0 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq h$）とすれば,

$\boldsymbol{r}_u = [-\sin u, (1/2)\cos u, 0]$, $\boldsymbol{r}_v = [0, 0, 1]$　（1 点）

より，$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \frac{1}{2}\cos u\boldsymbol{i} + \sin u\boldsymbol{j}$　（+1 点）．S 上での面積分を uv 平面上の二重積分に変換して計算する．

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA = \int_0^h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}\sin^3 u\cdot\frac{1}{2}\cos u + \cos^3 u\cdot\sin u\right)dudv \qquad (+1 点)$$

$$= h\left[\frac{1}{64}\sin^4 u - \frac{1}{4}\cos^4 u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad (+1 点)$$

$$= h\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{64}h \qquad (+1 点)$$