

数学基礎公式

1. 三角関数

オイラーの公式 (加法定理を容易に導くことが出来る)

$$1) \quad e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

加法定理:

$$2) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$3) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$4) \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

倍角公式: 加法定理の応用問題 (6) は 3 通りの表わし方がある)

$$5) \quad \sin 2\alpha =$$

$$6) \quad \cos 2\alpha =$$

半角公式: 倍角公式の応用問題 (6) を利用)

$$7) \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$8) \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

2. 対数関数・指数関数

$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ のとき

$$1) \quad x = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad b = a^x \quad (\text{対数の定義})$$

$x = \log_a b$ における a を底 (てい), b を真数 (必ず正数) と呼ぶ. 特に, e を底とする対数を自然対数という. このとき底 e を省くことが多い. また, $\log_e$ を $\ln$ と書く.

$$2) \quad \log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

$$3) \quad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$4) \quad \log_a x^b = b \log_a x$$

$$5) \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (\text{底の変換})$$

$$y = \log_e x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y \quad \text{この逆関数 (} x, y \text{ を交換) は, } y = e^x.$$

3. 積の微分・積分, 部分積分法

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \quad \text{or} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

$$\int \left(\frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \right) dx = f(x)g(x)$$

部分積分の公式(積の微分法から導かれる)

$$\int \frac{df}{dx}g dx = f \cdot g - \int f \frac{dg}{dx} dx \quad \text{or} \quad \int f'g dx = fg - \int fg' dx$$

特に, $f(x) = x$ の場合は盲点になるので注意。代表例は $\log x$ の積分:

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x(\log x)' dx = x \log x - x$$

部分積分は置換積分とともに頻繁に出る重要な計算法で, 多数の演習問題を解いて充分習熟しておく必要がある。

4. 商の微分・積分

積の微分の公式において $g(x)$ を $1/g(x)$ に置き換えれば得られる。

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f}{g} \right] = \frac{1}{g^2} \left(\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

次の形の商の積分はよく現れるので, 覚えていると便利。

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)|$$

5. 合成関数の微分

$F = F(z)$, $z = z(x)$ に対して,

$$\frac{d}{dx} F(z) = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx}.$$

また, $F'(z) = f(z)$ のとき

$$\int f(z) \frac{dz}{dx} dx = \int f dz = \int dF = F.$$

例: $F(x) = [(x+1)^3 + 1]^5$ のとき, $\frac{dF}{dx}$ を求めよ。

$F(z) = (z+1)^5$, $z = (x+1)^3$ とおけば,

$$\frac{d}{dx} F(z) = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} = 5(z+1)^4 3(x+1)^2 = 15[(x+1)^3 + 1]^4 (x+1)^2$$

6. 微積分公式(積分定数は省略)

以下の 1)~10)は必ず覚えていて自由自在に使える必要がある.

- $$\begin{array}{ll}
 1) \quad \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} & 2) \quad \frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \\
 3) \quad \frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax & 4) \quad \frac{d}{dx} \cos ax = -a \sin ax \\
 5) \quad \frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax} & 6) \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (n \neq -1) \\
 7) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log|x| & 8) \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \\
 9) \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax & 10) \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \\
 11) \quad \int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) dx = \frac{1}{a-b} \log \left| \frac{x-a}{x-b} \right| \\
 \text{(部分分数による積分の一例)}
 \end{array}$$

置換積分

以下の公式は覚える必要はない. 求め方を知っていればいい.

$\tan \frac{x}{2} = t$ とおいて, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ の関係を利用. なお, 部分分数を利用する方法もある.

- $$\begin{array}{l}
 12) \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{2} \log \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \\
 13) \quad \int \frac{1}{\cos x} dx = \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x}
 \end{array}$$

以下の積分では, $a^2 + x^2$ の形では $x = a \tan \theta$, $a^2 - x^2$ の形では $x = a \sin \theta$ (あるいは $x = a \cos \theta$) とおくことを知っていればいい.

- $$\begin{array}{ll}
 14) \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x & 15) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x \\
 16) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log(x + \sqrt{x^2+1}) = \sinh^{-1} x
 \end{array}$$

ただし, $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ は

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

で定義される双曲線関数で, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ の関係があることが容易にわかる. $\sinh^{-1}$ は $\sinh$ の逆関数である. すなわち,

$$y = \sinh^{-1} x \quad \rightarrow \quad x = \sinh y$$

基礎微積分確認テスト問題 (時間をかけても全問正解を目指してほしい)

問題1. 次の関数を微分せよ (導関数を求めよ)。

1) $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

8) $y = 2x^{\frac{2}{3}}$

2) $y = \frac{2}{x} + 3x^{-2}$

9) $y = \sin x + \cos x$

3) $y = 2(x+1)^4$

10) $y = \cos 3x - \sin x^2$

4) $y = 3(5x^2 + x - 1)^4$

11) $y = \sin^3 x - \frac{1}{\cos x}$

5) $y = \frac{1}{2x-1}$

12) $y = \log 3x + e^{-x}$

6) $y = \sqrt{x-1}$

13) $y = 3^x$

7) $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

14) $y = x^2 e^{2x}$

15) $y = x \log x^3$

問題2. 次の関数の不定積分を求めよ。

1) $\int (4x^2 - x + 2) dx$

7) $\int x \sin x dx + \int x \cos x dx$

2) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$

8) $\int (2x+1)^3 dx$

hint: $2x+1=t$ とおく

3) $\int (\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x}) dx$

9) $\int x \sqrt{x^2-1} dx$

hint: $x^2-1=t$ とおく

4) $\int (\sin x - \cos x) dx$

10) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

hint: 部分分数にしてから積分する

5) $\int (e^x + e^{-2x}) dx$

6) $\int (\log x)^2 dx$