

微分方程式期末試験解答例

1. 次の1階微分方程式を解きなさい。

(a) $y' + y = 0$

$\frac{dy}{dx} + y = 0$, これを変数分離して, $\frac{dy}{y} + dx = 0$. これを積分すると $\log|y| = -x + c$ (c は積分定数).

$y = \pm e^c e^{-x} = Ce^{-x}$ ($C = \pm e^c$ は積分定数)

(b) $y' + y = e^{2x}$

(a)で同次方程式の一般解はわかっているので, 非同次方程式の特解を求める. 特解の形を $y = Ae^{2x}$ と仮定して代入すると, $2Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x}$ だから, $A = 1/3$. 解は, $y = Ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$

(c) $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$

展開すると, $x^3dx - 3xy^2dx + y^3dy - 3x^2ydy = d\left(\frac{1}{4}x^4\right) - d\left(\frac{3}{2}x^2y^2\right) + d\left(\frac{1}{4}y^4\right) = 0$.

これを積分して, 4倍すると, $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = C$.

(d) $y'' = 2y' + 5$

$y' = p$ とおいて, p に関する微分方程式を解くと,

$p = \frac{1}{2}(Ce^{2x} - 5)$. これを積分して, $y = \frac{1}{4}Ce^{2x} - \frac{5}{2}x + D$ を得る (D は積分定数)。

2. かつこの条件を満たす, 次の微分方程式の解を求めなさい。

(a) $e^{x-y} + (1+e^x)y' = 0$ ($x=0, y=0$)

変数分離すると, $e^y dy + \frac{e^x}{1+e^x} dx = 0$. これを積分して $e^y + \log_e(1+e^x) = C$. 初期条件より, $C = \log_e 2 + 1$ を得る. $e^y = -\log_e \frac{1+e^x}{2} + 1$

(b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ ($x=0, y=0, y'=1$)

一般解は $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ であるから, 初期条件より, $0 = C_1 + C_2, 1 = -C_1 - 2C_2$. これより, $C_1 = 1, C_2 = -1$. よって, $y = e^{-x} - e^{-2x}$ である。

3. 次の問いに答えなさい。

(a) $y'' - 2y' - 3y = 0$ の一般解を求めなさい。→ $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

(b) $y'' - 2y' - 3y = 6e^{2x}$ の特解を求めなさい。→ $y = Ae^{2x}$ において A を求めると, $A = -2$ となる。特解は $y = -2e^{2x}$

4. 或る種のバクテリアの増加率は, 各時刻 t でのバクテリアの個数 x の平方根に比例するという。以下の問いに答えなさい。

(a) 比例定数を k として, バクテリアの個数 x と時間 t の関係を表す微分方程式を書きなさい。

(b) 初期時刻 $t=0$ における個数を x_0 とした時, 2時間後には2倍になっていた。初期時刻から4時間後には, バクテリアの個数は初期時刻の何倍になっているか。

(a) $\frac{dx}{dt} = k\sqrt{x}$

(b) 変数分離すると, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = kdt$. これを積分して, 初期条件を考慮すると, $2(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) = kt$

$t=2$ のとき, $x = 2x_0$ だから, $k = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{x_0}$ を得る。 $t=4$ における x の値は $(2\sqrt{2} - 1)^2 x_0 = (9 - 4\sqrt{2})x_0$

すなわち, $(9 - 4\sqrt{2})$ 倍になる。