

微分方程式期末試験解答例(2013)

1. 次の1階微分方程式を解きなさい。[各 10 点]

(a) $xy' - y = 0$ [プリント 2, 2]

変数分離して, $\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$. これを積分すると $\log\left|\frac{y}{x}\right| = c$ (c は積分定数). $y = \pm e^c x = Cx$

($C = \pm e^c$ は積分定数, 以下同様)

(b) $y' - \lambda y = 0$ [問題 2-1, 1(1)]

変数分離して, $\frac{dy}{y} = \lambda dx$. これを積分すると $\log|y| = \lambda x + c$, すなわち $y = \pm e^c e^{\lambda x} = Ce^{\lambda x}$.

(c) $y' - \lambda y = ae^{\mu x}$ (ただし, $\lambda \neq \mu$ とする) [問題 2-3, 1(1)]

斉次方程式の一般解は(b)で求まっている。非斉次方程式の特解を $Ae^{\mu x}$ と仮定して, A

を決める。 $(\mu - \lambda)Ae^{\mu x} = ae^{\mu x}$ より, $A = a/(\mu - \lambda)$ だから, 一般解は $y = Ce^{\lambda x} + \frac{a}{\mu - \lambda}e^{\mu x}$ 。

(d) $(4x^3 + 2xy)dx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$ [第 2 章演習問題[5](2)]

展開すると, $4x^3dx + (2xydx + x^2dy) + 3y^2dy = 0$, すなわち $d(x^4 + x^2y + y^3) = 0$
これより, $x^4 + x^2y + y^3 = C$ 。

2. かつこの条件を満たす, 次の微分方程式の解を求めなさい。[各 10 点]

(a) $y' = e^{x+y}$ ($x=0, y=0$) [プリント 2, 21]

$e^{-y}dy = e^x dx$. これを積分すると $-e^{-y} = e^x + C$. 初期条件より $C = -2$. $e^x + e^{-y} = 2$

(b) $y'' - 4y' + 3y = 0$ ($x=0, y=0, y'=2$) [第 3 章演習問題[1](2)]

一般解は $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$ であるから, 初期条件より, $0 = C_1 + C_2$, $2 = C_1 + 3C_2$. これより, $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. よって, $y = -e^x + e^{3x}$ である。

3. 次の問いに答えなさい。[各 10 点]

(a) $2y'' - 5y' + 3y = 0$ の一般解を求めなさい。→ $y = C_1e^x + C_2e^{\frac{3}{2}x}$ 問題 3-2, 1(4)

(b) $2y'' - 5y' + 3y = e^{-x}$ の特解を求めなさい。→ $y = Ae^{-x}$ とおいて A を求めると, $A = 1/10$

となる。特解は $y = \frac{1}{10}e^{-x}$ (※講義でやらなかったロンスキアンを使っている人もいましたが、面倒になります。この方が簡単)

4. (a) $\frac{dx}{dt} = kx^{2/3}$ [5 点], (b) 変数分離すると, $x^{-2/3}dx = kdt$. これを積分して, 初期条件

より, $3(x^{1/3} - x_0^{1/3}) = kt$. x について解くと, $x = \left(\frac{kt}{3} + x_0^{1/3}\right)^3$ となる。[15 点]

※今回の結果は非常に残念なものでした。微分積分の基礎が出来ていない, 変形ミスなどが目立ちます。特に 0 点の人は高校の数学Ⅲを復習してください。変数分離による 1 階微分方程式の解法、2 階定数係数常微分方程式の解法は基本です。