

『微分方程式』 期末試験解答例(2020)

1.

$$(1) \frac{dy}{dx} = e^x \cos x$$

直ちに積分できる形である。

$$\begin{aligned} y &= \int e^x \cos x dx = \int e^x (\sin x)' dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x (-\cos x)' dx \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \quad (5 \text{ 点}) \end{aligned}$$

よって,

$$y = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C \quad (+5 \text{ 点})$$

$$(2) y = px + \cos p$$

両辺を x で微分すると,

$$y' = p = p + p'x - p' \sin p, \quad p'(x - \sin p) = 0.$$

これより, $p' = 0$ または $x = \sin p$ (5 点).

前者より $p = C$ (C : 積分定数), 与式に代入して, $y = Cx + \cos C$ (+3 点)

後者を与式に代入して, $y = p \sin p + \cos p$. こ

れと $x = \sin p$ を組み合わせて, p をパラメータとして x と y の関係が与えられた. (+2 点)

2.

$$(1) \text{ 一般解は } y = Ce^{5x}.$$

(2) 非同次項の形から, 特解を $y = Ce^{3x}$ とおいて, 与式に代入する. $C = -1/2$ が得られる。

(3) 非同次方程式の一般解は $y = Ce^{5x} - \frac{1}{2}e^{3x}$ となるので初期条件を課すと, $C = 3/2$ (5 点)。

$$\text{したがって, } y = \frac{1}{2}(3e^{5x} - e^{3x}) \quad (+5 \text{ 点})$$

3.

(1) 同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - 4 = 0, \lambda = 2, -2$$

よって, 基本解は e^{2x} と e^{-2x} , 一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

(2) 非同次項の形から, 特殊解を $y = C \sin x$ の形で仮定して代入すると, $C = -1$ が得られる。特殊解は $-\sin x$ 。

(3) 非同次方程式の一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \sin x$$

である. x で微分すると,

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} - \cos x$$

条件を代入すると(次式各 2 点),

$$0 = C_1 + C_2, \quad 0 = 2C_1 - 2C_2 - 1.$$

これを解いて, $C_1 = \frac{1}{4}, \quad C_2 = -\frac{1}{4}$ (各 3 点).

$$y = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) - \sin x$$

4.

$$(1) \frac{du}{dt} = \frac{Q_{mf} w_e}{M_0 - Q_{mf} t} - g$$

直接積分して解を得られる形である。

$$\begin{aligned} u &= \int \left(\frac{Q_{mf} w_e}{M_0 - Q_{mf} t} - g \right) dt \\ &= -w_e \log(M_0 - Q_{mf} t) - gt + C \end{aligned}$$

初期条件: $t = 0$ で $u = 0$ より, $C = w_e \log M_0$ 。

$$u = w_e \log \frac{M_0}{M_0 - Q_{mf} t} - gt$$

(2) (1)で得られた式に与えられた数値を代入すれば, $u = 102 \text{ m/s}$ となる。

※驚くべきことに, 3. (1)で特性方程式を間違えている人 (一番多かったのは $\lambda^2 - 4\lambda = 0$) が多数いました。特性方程式は基本ですから, これは実に残念なことです。