

『微分方程式』 期末試験解答例(2021)

1.

$$(1) \frac{dy}{dx} = \log x$$

両辺を部分積分法で積分すると,

$$y = \int \log x dx = x \log x - x + C$$

※ $y = 1/x$ としている人が多数いてビックリ。

$$(2) y = xp + p(p-1)$$

両辺を x で微分して整理すると,

$$p'(x+2p-1)=0 \text{ より, } p'=0, \quad x=1-2p.$$

前半より $p = C$ (定数), 与式に代入して,

一般解 $y = Cx + C(C-1)$ が得られる。

後半よりパラメータ表示 $x = 1 - 2p, \quad y = -p^2$ が得られ, p を消去して

特異解 $y = -\frac{1}{4}(x-1)^2$ を得る。

2.

(1) 変数分離すると

$$\frac{dy}{y} = 2dx. \text{ これを積分すれば, } \log|y| = 2x + c.$$

y について解くと, $y = Ce^{2x}$ ($C = \pm e^c$ とおいた)。

(2) $y = Ce^{3x}$ の形の特殊解を仮定して代入すると, $(3-2)C = 2$ すなわち $C = 2$ が得られる。

特殊解は $y = 2e^{3x}$, よって一般解は

$$y = Ce^{2x} + 2e^{3x} \text{ となる。}$$

(3) (2)の結果に初期条件を課すと, これ $1 = C + 2$ 。したがって, $C = -1$ 。

$$y = -e^{2x} + 2e^{3x}$$

3.

(1) 同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \lambda = 2, -1$$

よって, 基本解は e^{2x} と e^{-x} , 一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

(2) 非同次項は基本解と重ならないので, 特殊解を $y = ke^{3x}$ とおいて代入し, $k = \frac{1}{4}$ 。特

殊解は $y = \frac{1}{4}e^{3x}$ である。

(3) 非同次方程式の一般解は

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4}e^{3x}$$

である. x で微分すると,

$$y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \frac{3}{4}e^{3x}$$

条件を代入すると,

$$0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{4}, \quad 0 = 2C_1 - C_2 + \frac{3}{4}.$$

これを解いて, $C_1 = -\frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{1}{12}$. ゆえに,

$$y = -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{12}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{3x}$$

4.

(a) 変数分離して積分すると,

$$\int \frac{dT}{T-T_0} = -k \int dt \text{ より, } T - T_0 = Ce^{-kt}$$

(b) 初期時刻 $t = 0$ で $T - T_0 = 14.5$ だから, $C = 14.5$. $t = 1$ で $T - T_0 = 13.8$ だから, $13.8 = Ce^{-k}$. これより, $e^k = 14.5/13.8$, すなわち, $k = 0.0495$ となる。

(c) (b)の結果より,

$$T - T_0 = 14.5 \exp(-0.0495t) \quad [t \text{ は時間(hour)}$$

で測る]

体温 $T = 36.5$ とすれば, $36.5 - 20.0 = 14.5 \exp(-0.0495t)$. $t = -2.61$ 時間。死亡推定時刻は 11 時半から 2.61 時間前の 8 時 53 分である。

※4において, 電卓がないと k の値と(3)に解答できないため, (a)を 10 点, (b)で C を求めて 10 点とした。