流体力学Ⅰ後半のポイント（期末再試験直前特訓）

(1) 連続の法則（質量保存の法則）、流量の概念 →教科書の練習問題 3.5～3.7, 3.12, 3.13

要するに、流体の質量は勝手に生成したり消滅したりしないということ（化学反応があると事情は異なる）。非定常の場合にも成り立つが、定常の方が理解しやすいので定常の場合について説明する。流れの中に仮想的な立体を考えた場合、定常ならばその中にある流体の質量は時間的に変化しない、つまり一定である。すると、流れによってその立体に流入する質量と流出する質量が互いに等しいことになる。

これに関連して、**流量**の概念が出てくる。流量には**質量流量**と**体積流量**の２種類があるが、普通に流量と言えば体積流量を指す場合が多い。流れの断面を指定したとき、その断面を単位時間当たりに通過する流体の質量が質量流量である。同様に、或る断面を単位時間当たりに通過する流体の体積が体積流量である。

$$\text{(体積)流量 } Q = \frac{\text{時間}t\text{の間に断面を通過する体積}V}{\text{時間}t},\quad \text{質量流量 } M = \rho Q$$

また、管路流れの場合、流量に基づいて**管内平均流速**が次式で定義される。

$$\text{管内平均流速 } U = \frac{\text{体積流量}Q}{\text{断面積}S}$$

となる。逆に、管内平均流速が与えられれば、体積流量 Q は

$$Q = SU$$

で与えられる。定常な非圧縮管路流れにおいて、断面１と断面２における断面積と管内平均流速をそれぞれ S_1、U_1、S_2、U_2 とすれば、連続の式は

$$S_1 U_1 = S_2 U_2$$

となる。

(2)流線の方程式 → 練習問題 3.1, 3.2

流線とは、その上の任意の点における接線の方向と速度の方向が一致するような曲線である。３次元流れの流線の方程式は

$$\text{直交直線座標系：}\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w},\quad \text{円柱座標系：}\frac{dr}{v_r} = r\frac{d\theta}{v_\theta} = \frac{dz}{v_z}$$

で与えられる。２次元の場合は最右辺の式を考えなければよい。

(3) 速度ポテンシャル → 練習問題 3.8～3.13

流体の速度 $\boldsymbol{V} = (u, v, w)$が、関数$\phi$を用いて

$$\text{直交直線座標系：}u = \frac{\partial \phi}{\partial x},\quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y},\quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z},\quad \text{円柱座標系：}v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r},\quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta},\quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

で与えられるとき、関数ϕを速度ポテンシャルという。

(4) 流れ関数 → 練習問題 2.4～2.7

２次元流れにおいて、流体の速度成分 u、v が座標 x、y および時刻 t の関数φを用いて

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

で与えられるとき、関数φを流れの関数という。流れの関数の定義より

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{（非圧縮性流体の連続の式）}$$

が成り立つので、流れ関数が存在する流れは非圧縮性流れである。曲線

$$\varphi = \text{const.}$$

は流線を表す。

(5) ベルヌーイの定理（定常） → 練習問題 4.10～4.14

流体におけるエネルギー保存則を意味するのがベルヌーイの定理である。特に、定常流れの場合、

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const.}\text{（ベルヌーイの式）}$$

が成り立つ。さらに、非圧縮性流体ではρを一定と見なせるので、

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} \quad \text{あるいは} \quad \frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z = \text{const.}\text{（ベルヌーイの式）}$$

となる。この式の形は質量 m の質点に対する力学的エネルギー保存の式

$$\frac{1}{2}mV^2 + mgz = \text{const.}$$

と似ている。実際、対応する項は物理的に同じ意味を持っている。**ただし、ベルヌーイの式には圧送エネルギーの項 p が加わっていることに注意すること。圧力 p は単位面積に作用する力という意味に加えて、流体の単位体積当たりのエネルギーという意味を持っているのである。**

液体や低速の気体では非圧縮性流体の後者が適用できるが、気体の膨張が関係する場合（教科書 p.57 の例題５）には前者を使う必要がある。

ベルヌーイの式は、連続の式と組み合わせた形で流速や圧力を求める問題の中でしばしば使われる。教科書 p.54 の例題１は代表的な問題なので、必ず解けるように練習しておくこと。問題によって求めるものが異なるが、基本的な考え方は同じ（連続の式とベルヌーイの式を使う）である。

なお、ベルヌーイの式はエネルギーの保存則であるから、流れに対してエネルギーが供給される場合には、そのエネルギーを加えて考えなければ成り立たない。教科書の練習問題 4.13 は送風機によって流体にエネルギーが与えられるので、送風機の上流と下流ではベルヌーイの式の const.の値が異なることに注意しよう。