期末試験問題（ベクトル解析基礎）

注意：途中退室を禁じます．教科書『線形代数とベクトル解析』の持ち込みは可ですが，ノートやプリント等は不可とします．試験時間は５０分です．答案は結果だけでなく，解答に至る過程を書くこと．［各問 10 点，50 点満点］

１．頂点の座標がそれぞれ A (1, 1, 1)，B (5, –7, 3)，C (7, 4, 8)で与えられる三角形 ABC の面積 S を，ベクトルの外積の性質を利用して求めなさい．

２. 点 P (3, 4, 5)におけるスカラー関数 $f = \log\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$の $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ 方向の方向微分係数を求めなさい．

３．座標面と曲面 $y = 1 - x^2$，$z = 1 - x^2$ に囲まれた第１象限の領域の体積 V を計算しなさい．

ヒント　領域の境界を xy 平面と xz 平面で描いて，領域のイメージを摑むと考えやすい．

４．$\boldsymbol{F} = [3y^2, x - y^6]$，$xy$ 平面上の領域 R を４点(1, 1), (– 1, 1), (– 1, – 1), (1, – 1)を頂点とする正方形領域としたとき，領域 R の境界 C 上の反時計回りの線積分 $\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ をグリーンの定理を適用して求めなさい。

５．$\boldsymbol{F} = [x\cos^2 x, y\sin^2 x, xz\sin 2x]$，$S$: 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ のとき，面積分 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dA$ の値をガウスの発散定理を用いて求めなさい．ただし，面 S は発散定理の仮定のように向きづけられているものとする．