# 期末試験問題（ベクトル解析基礎）解答例

各問 10 点、50 点満点。適宜部分点を与える。

１．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=[4,-8,2]$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=[6,3,7]$ なので（ここまでで 3 点），三角形 ABC の面積 $S$ と外積の関係 $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$ を利用すれば，

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & -8 & 2\\ 6 & 3 & 7\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-62\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}+60\boldsymbol{k}\right|=5\sqrt{77}\quad\text{（+7 点）}$$

※　問題文をよく読んでいない人がかなりいました。求めるのは三角形の面積です。ベクトルのなす角を求めないでも外積は計算できます。

２．例えば，$\dfrac{\partial}{\partial x}\log\left(x^2+y^2+z^2\right)=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$ より，$\mathrm{grad}f=\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}[x,y,z]$（3 点），すなわち，P 点における勾配の値は $\mathrm{grad}f_P=\dfrac{1}{25}[3,4,5]$（+2 点）。一方，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$ より（+2 点），$\boldsymbol{a}$ 方向の方向微分係数は

$$D_{\boldsymbol{a}}f=\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{grad}f_P=\frac{2}{25\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{75}\quad\text{（+3 点）（有理化しなくても可）}$$

３．　$xy$ 平面上で $x$ 軸，$y$ 軸，曲線 $y=1-x^2$ に囲まれる領域 $R$ を積分範囲として計算する．立体の高さは曲面 $z=1-x^2$ で与えられるので，

$$V=\iint_R z\,dxdy=\int_0^1\int_0^{1-x^2}\left(1-x^2\right)dydx\quad\text{（4 点）（積分の順序を入れ替えた方が計算が楽）}$$

$$=\int_0^1\left[\left(1-x^2\right)y\right]_0^{1-x^2}dx=\int_0^1\left(1-x^2\right)^2dx\quad\text{（+4 点）}$$

$$=\frac{8}{15}\quad\text{（+2 点）}$$

※　積分範囲を円と勘違いした人，正しく積分範囲を取れなかった人多数．一番出来が悪かったです．

４．平面におけるグリーンの定理より

$$\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_R\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(x-y^6\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(3y^2\right)\right\}dxdy=\iint_R(1-6y)dxdy\quad\text{（+5 点）}$$

$$=\int_{-1}^1\int_{-1}^1(1-6y)dydx=\int_{-1}^1\left[y-3y^2\right]_{-1}^1dx=\int_{-1}^1 2dx=4\quad\text{（+5 点）}$$

※　$\partial F_2/\partial x=-y^6$ として間違えた人が多数いました。ぼくにはなぜかわかりません。

５．$S$ 内の空間領域を $T$ として，ガウスの発散定理を適用する。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\cos^2 x+2x\cos x(-\sin x)+\sin^2 x+x\sin 2x=1\quad\text{（5 点）だから}$$

$$\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA=\iiint_T\mathrm{div}\boldsymbol{F}dV=\iiint_T dV=\frac{4\pi}{3}\cdot 3^3=36\pi\quad\text{（+5 点）（体積積分は球の体積になる）}$$

※ 簡単な問題ですが，div$\boldsymbol{F}$ の計算（$x\cos^2 x$ の微分）が正しくできないために、落とした人が多かった。