期末試験問題（ベクトル解析基礎）解答例

１． $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = [5, l-1, 4]$，$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} = [1, 1, m-2]$，$\boldsymbol{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = [n, 2, -1]$ より，平行六面体の体積 V は，

$$V = \left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{pmatrix}\right| = \left\|\begin{matrix} 5 & l-1 & 4 \\ 1 & 1 & m-2 \\ n & 2 & -1 \end{matrix}\right\| = \left|5\times(-2m+3) + (l-1)\times\{(m-2)n+1\} + 4\times(2-n)\right|$$

２．例えば，

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}2x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = -x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$ より，

$\mathrm{grad} f = -\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}[x, y, z]$，すなわち，P 点における勾配の値は

$$\mathrm{grad} f_P = -\frac{1}{\left(\sqrt{l^2+m^2+n^2}\right)^3}[l, m, n].$$

一方，$|\boldsymbol{a}| = 3$ より，$\boldsymbol{a}$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \frac{1}{3}[2,2,1]$．ゆえに $\boldsymbol{a}$ 方向の方向微分係数は

$$D_{\boldsymbol{a}} f = \boldsymbol{b}\cdot\mathrm{grad} f_P = -\frac{2l+2m+n}{3\left(\sqrt{l^2+m^2+n^2}\right)^3} = \frac{p}{3\left(\sqrt{q}\right)^3}$$

$$p = -(2l+2m+n),\quad q = l^2+m^2+n^2$$

３．積分記号内の微分形式が完全微分なので，直ちに積分できる．

$$\int_{(0,0)}^{(\pi/2,\pi/2)}(l\cos lx\cos my\,dx - m\sin lx\sin my\,dy) = \int_{(0,0)}^{(\pi/2,\pi/2)} d(\sin lx\cos my)$$

$$= [\sin lx\cos my]_{(0,0)}^{(\pi/2,\pi/2)} = \sin\frac{l\pi}{2}\cos\frac{m\pi}{2}$$

４．z を xy 平面上の矩形領域で二重積分すればよい．

$$V = \iint_R z\,dxdy = \int_0^m\int_0^l\left(6x^2+9y^2\right)dxdy = \int_0^m\left[2x^3+9y^2x\right]_0^l dy$$

$$= \int_0^m\left(2l^3+9ly^2\right)dy = \left[2l^3y+3ly^3\right]_0^m = lm\left(2l^2+3m^2\right)$$

５．面積分にガウスの発散定理を適用して，三重積分に変換すると

$$\frac{1}{\pi}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dA = \frac{1}{\pi}\iiint_T\left(l+nx^2-nx^2\right)dV = \frac{l}{\pi}\iiint_T dV = lV = 36l$$ （V は空間領域の体積）

（空間領域は半径 3 の球だから $V = 36\pi$）