期末試験問題（ベクトル解析基礎）

注意：途中退室を禁じます．教科書『線形代数とベクトル解析』の持ち込みは可ですが，ノート，プリント等，電卓は不可とします．試験時間は５０分です．答案は結果だけでなく，解答に至る過程を書くこと．［各問 10 点，50 点満点］

１．ベクトル $\boldsymbol{n} = [3, 4, 5]$に垂直で，空間内の点 A (6, 7, –8)を通る平面の方程式を求めなさい．

２．点 P: (1, 0, 1)におけるスカラー関数 $f = x^2 + 3y^2 + 4z^2$ の $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \mathrm{k}$ 方向の方向微分形数を求めなさい．

３．放物面 $z = 1 - (x^2 + y^2)$が xy 平面によって切り取られる部分の体積 V を計算しなさい．

４．xy 平面上の領域 R を，$1 \le x^2 + y^2 \le 4$，$x \ge 0$，$y \ge x$ とし，その境界を C とする．$\boldsymbol{F} = [-x^2y + x, xy^2 - y]$で与えられた場合，線積分$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \left(F_1 dx + F_2 dy\right)$の値を平面におけるグリーンの定理を応用して求めなさい．ただし，C の向きは領域 R が左にあるように決めるものとする．

$\boxed{\text{ヒント}}$　領域 R を図示して考える．２重積分は極座標に変換して行うことになる．ここで極座標への変換にはヤコビ行列式を用いることを忘れないこと．

５．$\boldsymbol{F} = [\cos x \cos y, \sin x \sin y, e^z]$，$S$: 立方体$|x| \le 1$，$|y| \le 1$，$|z| \le 1$の境界面のとき，面積分$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA$の値をガウスの発散定理を用いて求めなさい．ただし，面 S は発散定理の仮定のように向きづけられているものとする．