期末試験問題（ベクトル解析基礎）解答例

各問 10 点、50 点満点。適宜部分点を与えた。

１. 平面上の点 P の座標を(x, y, z)とおけば, ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = [x-6, y-7, z+8]$は平面内のベクトルである (3 点).

したがって，このベクトルは$\boldsymbol{n}$と垂直だから，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$が成り立つ．よって，

$3(x-6)+4(y-7)+5(z+8)=0$，すなわち$3x+4y+5z=6$（+7 点）

２． $\mathrm{grad}f = [2x, 6y, 8z]$の点 P における値は[2, 0, 8]である（3 点）．$\boldsymbol{a}$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right)$$ （+3 点），

であるから，$\boldsymbol{a}$ 方向の方向微分係数 $D_{\boldsymbol{a}}f$ は

$$D_a f = b\cdot \mathrm{grad}f = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2+8) = 2\sqrt{3}\,.$$ （+4 点）

３．放物面と xy 平面の交線は単位円$x^2+y^2=1$である．極座標に変換すると定積分の計算が楽になる：$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ dxdy = rdrd\theta$（3 点）だから

$$V = \iint_R z dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$ （+7 点）

あるいは，求める体積 V は対称性を利用して

$$V = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2-y^2\right)dydx = 4\int_0^1\left[\left(1-x^2\right)y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx$$ （3 点）

$$= 4\int_0^1\left\{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\right\}dx = \frac{8}{3}\int_0^1\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{8}{3}\frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$$ （+7 点）

４． $\boldsymbol{F} = [-x^2y+x, xy^2-y] = [F_1, F_2]$とおくと，$\dfrac{\partial F_2}{\partial x}-\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = y^2-\left(-x^2\right) = x^2+y^2$（2 点）．平面におけるグリーンの定理より，

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C\left(F_1dx+F_2dy\right) = \iint_R\left(x^2+y^2\right)dxdy.$$ （+3 点）

境界 C で囲まれた領域 R は，極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$を用いれば $1 \le r \le 2,\ \pi/4 \le \theta \le \pi/2$（+2 点）と表されるので，求める積分は

$$\iint_R\left(x^2+y^2\right)dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_1^2 r^2 r dr d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 d\theta = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{15}{4} = \frac{15}{16}\pi\,.$$ （+3 点）

５．ガウスの定理を適用すれば，$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = e^z$ より（3 点），

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dA = \iiint_T e^z dxdydz = \int_{-1}^1\int_{-1}^1\left[e^z\right]_{-1}^1 dydz = \int_{-1}^1\int_{-1}^1\left(e-e^{-1}\right)dydz = 4\left(e-e^{-1}\right)$$ （+7 点）