生命環境化学特別演習（第１回）

(1) ボーア原子モデルで、$n=1$ および $n=2$ のときの電子の速度 v [m s^{-1}]を、それぞれ有効数字３桁で求めよ。

(2) 量子数 n における軌道のエネルギー E の関係を示す次式の､定数 A の値を有効数字３桁で求めよ。なお、エネルギー E の単位は eV であり、$1\ \mathrm{eV} = 1.602\times10^{-19}$ J を用いてよい。 $E\ [\mathrm{eV}] = \dfrac{A}{n^2}$

(3) ライマン系列で、 $n=2$（励起状態）から $n=1$（基底状態）への発光の波長 λ [m]を、有効数字３桁で求めよ。

【解答例】

(1) 電子の速度 v は、$mvr = n\dfrac{h}{2\pi}$【スライド 7】より $v = \dfrac{nh}{2\pi mr}$ の式で示されます。これに、ボーア原子モデルにおける r の式 $r = \dfrac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi me^2}$【スライド 7】を代入すると、$v = \dfrac{nh}{2\pi m}\cdot\dfrac{\pi me^2}{n^2h^2\varepsilon_0} = \dfrac{e^2}{2nh\varepsilon_0}$

となります。これに、上記の各値を代入すると、

● $n=1$ のとき

$$v = \frac{\left(1.602\times10^{-19}\ [\mathrm{C}]\right)^2}{2\times1\times\left(6.626\times10^{-34}\ [\mathrm{J\ s}]\right)\times\left(8.854\times10^{-12}[\mathrm{J^{-1}\ C^2\ m^{-1}}]\right)} = 2.187\times10^6 = \underline{2.19\times10^6[\mathrm{m\ s^{-1}}]}$$

● $n=2$ のとき

$$v = \frac{\left(1.602\times10^{-19}\ [\mathrm{C}]\right)^2}{2\times2\times\left(6.626\times10^{-34}\ [\mathrm{J\ s}]\right)\times\left(8.854\times10^{-12}[\mathrm{J^{-1}\ C^2\ m^{-1}}]\right)} = 1.094\times10^6 = \underline{1.09\times10^6[\mathrm{m\ s^{-1}}]}$$

(2) $E = -\dfrac{m\ [\mathrm{kg}]\cdot e^4[\mathrm{C^4}]}{n^2\cdot8\cdot\varepsilon_0{}^2[\mathrm{C^4\cdot J^{-2}\cdot m^{-2}}]\cdot h^2[\mathrm{J^2\cdot s^2}]}$ より、E の単位は $[\mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}] = [\mathrm{J}]$ となる。

よって、$E\ [\mathrm{eV}] = \dfrac{A}{n^2}$ の A の項は $-\dfrac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2h^2}$ [J] となるので、これに各値を代入し単位 [eV] に変換して、

$$-\frac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2h^2} = -\frac{\left(9.109\times10^{-31}[\mathrm{kg}]\right)\times\left(1.602\times10^{-19}\ [\mathrm{C}]\right)^4}{8\times\left(8.854\times10^{-12}[\mathrm{C^2\ J^{-1}\ m^{-1}}]\right)^2\times\left(6.626\times10^{-34}\ [\mathrm{J\ s}]\right)^2}\times\frac{1}{1.602\times10^{-19}}[\mathrm{eV\ J^{-1}}]$$

$$= -\frac{5.996\times10^{-106}}{2.753\times10^{-88}}[\mathrm{J}]\times\frac{1}{1.602\times10^{-19}}[\mathrm{eV\ J^{-1}}] = -13.5954 = \underline{-13.6[\mathrm{eV}]}$$

【参考】 $E\ [\mathrm{eV}] = -\dfrac{13.6}{n^2}$ の式は、分光学ではよく知られており、現在も汎用される式です。

(3) 発光のエネルギー ΔE は、$\Delta E = E_{n_1} - E_{n_2} = \dfrac{me^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^2}\left(\dfrac{1}{n_2{}^2} - \dfrac{1}{n_1{}^2}\right)$ の式で求められます。これに、

$n_1 = 2$, $n_2 = 1$, および上記の各値を代入すると、

$$\Delta E = \frac{\left(9.109\times10^{-31}[\mathrm{kg}]\right)\times\left(1.602\times10^{-19}\ [\mathrm{C}]\right)^4}{8\times\left(8.854\times10^{-12}[\mathrm{J^{-1}\ C^2\ m^{-1}}]\right)^2\times\left(6.626\times10^{-34}\ [\mathrm{J\ s}]\right)^2}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$= \frac{5.996\times10^{-106}[\mathrm{kg\ C^4}]}{2.753\times10^{-88}[\mathrm{C^4\ m^{-2}\ s^2}]}\times\frac{3}{4} = 1.634\times10^{-18}\ [\mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}}] = 1.63\times10^{-18}\ [\mathrm{J}]$$

$\lambda = \dfrac{hc}{E}$ より、求める波長 λ は、

$$\lambda = \frac{\left(6.626\times10^{-34}\ [\mathrm{J\ s}]\right)\times\left(2.998\times10^{8}[\mathrm{m\ s^{-1}}]\right)}{1.634\times10^{-18}\ [\mathrm{J}]} = 1.215\times10^{-7} = \underline{1.22\times10^{-7}\ [\mathrm{m}]}\ (= 122\ \mathrm{nm})$$

【スライド 2】左下の図中にもありますが、波長 122 nm に相当します。