

● 2

まず、今日の授業で登場する二人のノーベル物理学賞受賞者、いずれも理論物理学を中心とした研究者です。

ルイ・ド・ブロイ（フランス：1892-1987）は、「電子の波動性の発見」の功績により1929年にノーベル物理学賞を受賞しています。いわゆる量子力学の基礎となった「ド・ブロイ波（物質波）」を仮説として提唱し、全ての物質が波動性を持つとするものです。その礎となる「ド・ブロイの式」は今回の授業でもスライド5で登場します。

アルベルト・アインシュタイン（ドイツ：1879-1955）は「20世紀最高の物理学者」といわれ、1921年にノーベル物理学賞を受賞しました。その際に評価された研究の中心は「光量子仮説に基づく光電効果の理論的説明」でありましたが、実際の功績はこの分野内外で造詣深く、相対性理論（一般相対性理論・特殊相対性理論）などでも広く知られています。ここでは、光量子仮説に基づく光電効果の理論的説明を導いた科学者として紹介しています。

● 3

前回の授業の最後のスライドで少し触れましたが、光の波動性を見出した「ヤングの実験」についてです。

もともと、波とは空間のなかに伝わる現象を指します。そして波は足し合わせることができます。

【スライド左図】具体的には、波形の高低のパターンが重なる時には、波は強め合います。一方、波の高低のパターンが+と-で互い違いになるときは、波は弱め合います。この性質は、波の干渉として知られています。【スライド右図】光がスリット1とスリット2でそれぞれ回折し、その後干渉したとすると、2つの回折光の強め合う位置が特定の方向に並んでいることに気づきます。つまり、図のような干渉の縞模様は光の回折と干渉によって生じたものと考えることができ、光が波によって伝わる性質を抽象的ながら示しました。

● 4

これも前回授業の最後のスライドで少し触れましたが、「ヤングの実験」以降さらに、アインシュタインは光の粒子性について「光電効果」によって説明しました。これは真空中にて、電子を発しやすい（1価陽イオンになりやすい）ナトリウム金属へ、波長を段階的に変えた光を当てた結果、エネルギーの閾（しきい）値(W)をもって光電子エネルギーに比例して飛び出す現象（関係式： $E_p = h\nu - W$ ）を実験的に説明しました。これをもとに、自ら提唱した「アインシュタインの相対性理論」とともに、次のような展開で光の粒子性（光子という量子化された粒子による特性）を示しました。

《以下の説明は、講義内では省略されています。》

《次ページへ》

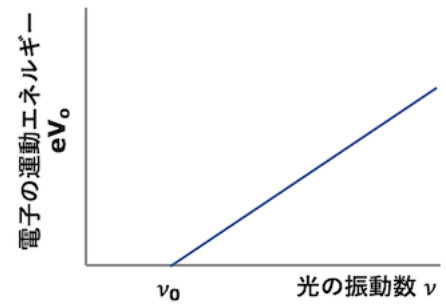
光の波長を λ 、波数を ν 、プランク定数を h 、エネルギーの閾値を W 、閾値での光の波数を ν_0 とすると、

光のエネルギーは $E = h\nu = hc / \lambda$ なので、エネルギー保存則

より $E_p = h\nu - W$ 。また $\nu_0 = \frac{W}{h}$ が成り立つので、

$E_p = h(\nu - \nu_0)$ の関係が説明される。すなわち、1 原子が 1

つの光子（光の粒）を吸収したと解釈することもできる。



さらに、アインシュタインの相対性理論より、電子の静止質量を m とすると、速度 v で運動する

粒子の質量 m_v は、 $m_v = \frac{m}{\sqrt{1 - (v^2 / c^2)}}$ の関係がある。

また、粒子の運動量 p は $p = m_v v$ 、エネルギー E は $E = m_v c^2$ で求められる。

これら 3 つの式より、 $(m_v^2 = \frac{m^2}{1 - (v^2 / c^2)})$ を変形して $m_v^2 c^2 = m^2 c^2 + m_v^2 v^2$ となるので、

$E^2 = m_v^2 v^4$ および $p^2 = m_v^2 v^2$ を代入すると、 $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ が導かれる。

光の場合は、 $m = 0$ （質量なし）および $E = h\nu = hc / \lambda$ なので、それぞれ代入して $p = h / \lambda$ が導かれる。

● 5

では、電子は光と同じように、粒子性と波動性があるのでしょうか？

まず、波動性を調べるには、光と同様にヤングの実験で検証できます。これは後で（検出器が進化した後に）光で起こった干渉縞が電子線でも起こることが検証され、電子の波動性が説明されています。【スライド 5】

加えて、波動性に関しては、電子にかかわらず全ての物質において、ある条件を満たせば（＝運動している状態であれば）波としてふるまう、いわゆる「物質波（ド・ブロイ波）」の概念をド・ブロイは提唱しました。その際、先の $p = h / \lambda$ と同じ意味を持ちますが、速度 v で運動する質量 m の粒子について、運動量を $p (=mv)$ としたとき、波長が、 $\lambda = h / mv = h / p$ で与えられる、いわゆる「ド・ブロイ波長」となることを提案しました。いわゆる「ド・ブロイ波長」の仮説は、電子だけではなく全ての物質が波動性を持つとするものとして示されたものです。今では量子力学の基礎（全ての物質やエネルギーは粒子的な性質と波動的な性質の両方を持つ）となっていますが、当時は受け入れられなかった解釈です。しかし、100V 程度の電圧で加速した時の電子のド・ブロイ波長は、約 1Å (0.1 nm) で X 線の波長に近く、電子線を結晶に当てて干渉縞などを観測することによって「ド・

「ブローイ波」の存在は確認されます。この結果から、原子内の電子の運動が整数倍のとびとびになる理由を、整数個のうねる波（定常波）で説明しています

これは、前回授業でも登場した「ボーアの量子モデル」とともに、以下に説明されます。

● 6

電子を波と見なす考え方の上で、原子内の電子の運動が整数倍のとびとびになる（＝量子化されている）理由は、モデル図【スライド 6】のように軌道の円周が ド・ブローイ波の波長の整数倍でないと、波が滑らかにつながらず、連続な定在波ができないことによると説明しました。つまり、始点の位置がゼロであったとき、円周を回って始点に戻った時にゼロになっていない波は定在波にならず、混在する逆位相の波と打ち消し合って干渉することになるのに対し、始点に戻った時にゼロになる定在波は周回を続けても他の波に干渉されることなく運動を続けられる、という意味です。

これにより、ボーアの量子論における量子条件（定常状態の条件）は、滑らかにつながった連続的な ド・ブローイ波（定在波）であることを説明しました。この考え方が受け入れられ、後の波動関数の考え方やシュレーディンガー方程式の成り立ちに大きな基盤となったことから、ド・ブローイは「電子の波動性」の研究によるノーベル物理学賞を 1929 年に受賞しました。

● 7

前の【スライド 6】で登場した、ボーアの量子論における量子条件（定常状態の条件）における連続的な ド・ブローイ波（定在波）は、 $mvr = n \frac{h}{2\pi}$ および $\lambda = \frac{h}{mv}$ から、 $2\pi r = n\lambda$ の式で示されます。つまり、 $2\pi r$ が円周の長さ（円軌道の一周）に相当するので、軌道の長さ（ $2\pi r$ ）が ド・ブローイ波長（ λ ）の整数倍（ n ）となる、ということを意味します。

このような簡単な式ではありますが、この関係は（今回授業ではありませんが、）今後登場する「シュレーディンガー方程式」で扱う予定です。

● 8

このスライドでは、いわゆる「偏微分」の基本的なおさらいです。もう理解されている方には何も支障ないと思われますが、念のため要点は以下の 3 つです。

- ・ 二つの変数 x, y について、 y の x に関する微分は $\frac{dy}{dx}$ で表される。
- ・ 三つの変数 x, y, z があるとき、 y の x に関する微分は $\frac{\partial y}{\partial x}$ で表される。（このとき z は定数とみなして、 x と y との間での微分をすることになる。）
- ・ $f(x, y)$ を全微分可能であれば、 $f(x, y)$ を z と置いて、全微分は $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ で表される。

● 9

ここからは、波はある関数（＝波動関数）に従って波動性を示すことから、その波を表すための「波動方程式」の導入です。ここでは単純化するため、一次元で考えることにします。

その際、最もわかりやすいモデルとして「弦の振動」を用います。（二次元で解釈する場合は「膜の振動」を用いますが、この授業では触れません。）

【用語について】

「**波動関数**」……波の動きを表現する時間と空間の関数。対象となる系の量子状態を表す状態関数と同義。波動方程式を満足させる関数。（波動関数の絶対値の2乗は、対象としている系の状態のその空間と時間に存在する確率に比例する。）次の「**波動方程式**」の解に相当する。

「**波動方程式**」……波動に関する運動状態を記述する方程式で、空間座標と時間とを独立変数とする偏微分方程式。（次回以降の本講義で登場の）シュレーディンガーの波動方程式は、その代表例。

いま、図のように、振動する前の弦の位置を x 軸とし、振動時の x 軸からの変位 u が時間 t とともに変化する場合は考える。よって、変位 u は位置 x と時間 t の関数として、 $u(x,t)$ として示されます。

いま、長さ dx の微小部分（ $x-dx/2$ から $x+dx/2$ までの区間：図中の A～B）について考えると、微小部分の両端 A, B では、同じ力で引っ張られた状態となっています。

ここで、弦の単位質量を ρ とし、微小部分（A と B の間）の質量 m は、 $m = \rho dx$ となります。

● 10-11

【スライド9から続きます】

微小部分の加速度 a は、変位 u に対する時間の二次微分で示されるので、 $a = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ と示されます。よって、この式に $m = \rho dx$ を加えて $F = ma$ （力を示す式）の形の式にすると、

$$F = ma = \rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{となります。この力が、周囲からこの微小部分に働く力に相当します。}$$

さらに、両端 A, B は同じ力で引っ張られた状態なので、図のように

$$\cdot \text{平行成分は、} F = T \cos \theta_1 - T \cos \theta_2 = T (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$\cdot \text{垂直成分は、} F = T \sin \theta_1 - T \sin \theta_2 = T (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

となります。このとき、 θ は（ θ_1 , θ_2 とも）非常に小さい角度となるので、それをもとに近似すると、（ $\theta \doteq 0$ に近似できるとき、 $\cos \theta \doteq 1$, $\sin \theta \doteq \tan \theta$ の近似）

$$\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2 \approx 1 \quad (\text{よって平行成分は } F \doteq 0) \quad \underline{\text{よって平行成分は無視できる。}}$$

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\tan \theta \text{ は、弦の傾きを意味するため } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ と同義})$$

と置くことができます。垂直成分について、 $F = T(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$ に $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ を代

入すると、
$$F = T \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\frac{dx}{2}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x-\frac{dx}{2}} \right\} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx$$
 の式が得られます。

この式と、 $F = ma = \rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ (力を示す式) をあわせると、

$T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = \rho dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ となります。この式を簡潔にするために、 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ (波の速度 v) と

置き換えると、**一次元の波動方程式** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ が得られます。この式は今後、波動方程式を解く ($u(x,t)$ を求める) 際に出てきます。

● 12

では、**一次元の波動方程式** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ を用いて、時間 t , 位置 x における変位 u を求める式を考えます。

まず、この「弦の振動」では、両端が固定されています。よって、両端では変位 u は 0 です。よって、 $x=0$, $x=l$ のとき変位 u が 0 です。このような条件を「境界条件」といいます。

ここで、2つの変数となる $u(x,t)$ を、二つの関数の積として $u(x,t) = f(x)g(t)$ の形で示すことにします。これに境界条件を適用すると、 $f(0) = f(l) = 0$ です。

● 13

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ に、 $u(x,t) = f(x)g(t)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \cdot \text{《左辺》} &= \frac{\partial^2 \{f(x)g(t)\}}{\partial x^2} = g(t) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \\ \cdot \text{《右辺》} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \{f(x)g(t)\}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} f(x) \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

となるので、これを整理すると、 $\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{g(t)} \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2}$ となります。

この式で、任意の x と t に関して常に成立するには、両辺が(ある)定数値をとる必要がある。その定数を k とすると、

$$\text{《左辺》: } \frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = k \quad \text{これが位置}(x)\text{に関する方程式となり、}$$

《右辺》: $\frac{1}{v^2} \frac{1}{g(t)} \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} = k$ これが位置(t)に関する方程式となります。

● 14

【スライド 13 から続きます】

この方程式を解くとき、(結論から先に示すと) $k < 0$ のときに方程式が解かれ、 $k \geq 0$ のときは弦の振動がないことになります。

《以下の説明はその理由ですが、講義内では省略されています。》

位置(x)に関する方程式 $\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = k$ について、その一般解は (A, B を定数として)

① $k > 0$ のとき: $f(x) = A \exp(\sqrt{k}x) + B \exp(-\sqrt{k}x)$

② $k = 0$ のとき: $f(x) = Ax + B$

③ $k < 0$ のとき: $f(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ ($k = -\alpha^2$ とおく)

上記を考えると、

①の場合は、境界条件 $f(0) = f(l) = 0$ より、 $A + B = 0$ および $A \exp(\sqrt{k}l) + B \exp(-\sqrt{k}l) = 0$

となるので、両方の式を合わせると $A \{ \exp(\sqrt{k}l) - \exp(-\sqrt{k}l) \} = 0$ が成立します。この式で、

$\exp(\sqrt{k}l) - \exp(-\sqrt{k}l) \neq 0$ なので、 $A = 0$ 。よって、 $A + B = 0$ より $B = 0$ 。この結論として、弦は振動しないことになります。

次に②の場合、同様に境界条件 $f(0) = f(l) = 0$ から、 $A = B = 0$ 。よって弦は振動しないことになります。よって、③の場合のみ弦の振動が求められる(以下) ことになります。

いま、 $k = -\alpha^2$ とおくと、左辺の位置(x)に関する方程式は $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \alpha^2 f(x) = 0$ の式となり、こ

の式での一般解は (A, B を定数として) $f(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ と置くことができます。

境界条件 $f(0) = f(l) = 0$ 。より、 $f(0) = 0$ のときを考えると、 $x = 0$ を代入すると $\sin \theta = 0$, $\cos \theta = 1$ となるので、 $A = 0$ しかない。よって、 $f(x) = B \sin \alpha x$ になります。

さらに、 $f(l) = 0$ 。よって、 $f(x) = B \sin \alpha l = 0$ が成り立つことになります。これを満足するには、 $\alpha l = n\pi$ (n は整数) しかありません。

● 15

【スライド 14 から続きます】

よって、 $f(x) = B \sin \alpha x$ の式に、 $\alpha l = n\pi$ を変形した $\alpha = \frac{n\pi}{l}$ を代入すると、 $f(x) = B \sin \frac{n\pi x}{l}$ の式が得られます。この式のままで使えますが、ここで定数 B は「波の振幅」を表すので、一般式とするため $B = 1$ として、求める式 $f_n(x)$ は、

$$f_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n \text{ は整数}) \quad \text{として示されます。}$$

つまり、スライド 14 の右図の各波形のように、この関係式は n によって量子化された sin 波となることがわかります。この内容が、後で登場する（電子の）軌道の概念につながることであります。

● 16

前の2つのスライド【スライド 14-15】では、位置(x)に関する方程式 $\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = k$ 【スライド 13】について解きました。これと同様に、今度は時間(t)に関する方程式 $\frac{1}{v^2} \frac{1}{g(t)} \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2}$ について解いてみましょう。

いま、 $k = -\alpha^2$ とおくと、時間(t)に関する方程式は $\frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} + \alpha^2 v^2 g(t) = 0$ の式となります。

この方程式の解は、($\alpha = \frac{n\pi}{l}$ より、いま $\omega_n = \frac{n\pi x}{l}$ と置いて、また C, D を定数として)

$$g_n(t) = C \cos \omega_n t + D \sin \omega_n t \quad \text{と示すことができます。}$$

よって、これを一般解とするために、 $C \cos \omega_n t + D \sin \omega_n t$ の項を (α と ϕ は任意の定数として)

$$a_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad \text{と置いて、一次元の波動方程式の解 } u(x, t) \text{ の式}$$

$$u(x, t) = f_n(x) g_n(t) = a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad \text{が得られました。}$$

この式は、次回以降の波動関数、シュレーディンガー方程式（代表的な波動方程式）への展開に重要な式です。

● 17【ヒントのみ】

今回の授業での課題です。

- (1) ごく基本的な問題です。例えば、右図の $n=1$ の場合、 $0 \rightarrow l$ の波は波長(λ_n)いくつ分に相当しますか？
以下、 $n=2, 3, \dots$ でも同様です。これを基に、 λ_n を l, n を用いた簡単な式で示しましょう。

- (2) $g_n(t) = a_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$ の関係式を使う問題ではありません。

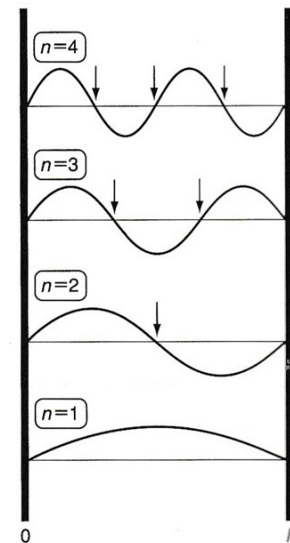
せん。 $\omega_n = \frac{n\pi v}{l}$, また $\omega_n = 2\pi \nu_n$ がいずれも成り立ちま

すので、この2つの式だけから波の速度 v を ν_n, l, n を

使った簡単な式で示せます。

さらに、 λ_n の式 ((1)の解答: l, n を用いた式) をこれに代入できますので、簡単な式で示せます。

(つまり、波の速度 v は、何の積として求められることになるのでしょうか？ それを導いていただく問題です。)



一次元の弦の振動
弦の両端は固定されている。矢印は節の位置を示す。