『微分方程式』期末試験解答例(2019)

１．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

同次形なので，$u = y/x$ とおくと，$y = ux$, $y'=u+u'x$ より，

$u+u'x=u+\dfrac{1}{u}$，すなわち $\dfrac{du}{dx}x=\dfrac{1}{u}$．変数分離して，積分すれば

$\int u\,du=\int\dfrac{dx}{x}$，$u^2=2\log|x|+C$ (5 点)，よって，

$y^2=x^2\left(2\log|x|+C\right)$(+5 点)

(2) $y=px+\dfrac{1}{p}$

両辺を x で微分すると，

$$y'=p=p+p'x-\frac{1}{p^2}p',\quad p'\left(x-\frac{1}{p^2}\right)=0.$$

これより，　$p'=0$ または $x=\dfrac{1}{p^2}$　(5 点).

前者より $p = C$（C: 積分定数），与式に代入して，$y=Cx+\dfrac{1}{C}$ (+3 点)

後者より，$p=\pm1/\sqrt{x}$（$x\ge0$）．与式に代入して，$y=\pm2\sqrt{x}$，あるいは $y^2=4x$（特異解）(+2 点)

※　微分と積分を取り違えて，$1/p$ を微分して $\log|p|$ としている人が数名いました。

２．

(1) 一般解は $y = Ce^{3x}$.

(2) 非同次項が一般解と同じ関数形なので，$y=Cxe^{3x}$ の形の特殊解を仮定して代入すると，$C = 1$ が得られる。特殊解は xe^{3x}。

(3) 非同次方程式の一般解は $y=Ce^{3x}+xe^{3x}$ となるので初期条件を課すと，$1 = C$ (5 点)。したがって，$y=e^{3x}+xe^{3x}=(x+1)e^{3x}$ (+5 点)

３．

(1) 同次方程式の特性方程式は

$$\lambda^2-3\lambda-4=0,\ \lambda=4,-1$$

よって，基本解は e^{4x} と e^{-x}，一般解は

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$$

(2) 非同次項は x の 1 次関数なので，特殊解を $y = Ax + B$ とおいて代入し，定数 A, B を決める。$A = –1$(5 点)，$B = 3/4$(+5 点)．特殊解は $y = –x +3/4$ である。

※　$4(Ax + B) = 4Ax + 4B$ とすべきところ $4(Ax + B) = 4Ax + B$ とするミスが目に付きました（けっこう多数。なぜ？）。係数 4 は２つの項それぞれにかかります。今のうちに直さないといけません。

(3) 非同次方程式の一般解は

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} – x +3/4$$

である．x で微分すると，

$$y' = 4C_1e^{4x} – C_2e^{–x} –1$$

条件を代入すると(次式各 2 点)，

$$0=C_1+C_2+\frac{3}{4},\quad 0=4C_1-C_2-1.$$

これを解いて，$C_1=\dfrac{1}{20}$，$C_2=-\dfrac{4}{5}$(各 3 点).

$$y = (1/20)e^{4x} – (4/5)e^{-x} – x +3/4$$

４．

(1) 変数分離して積分すれば $R=Ce^{kx}$ となる（C は積分定数）。

(2) 条件を代入すれば，$C = 1$ となる。$R=e^{kx}$

(3) 条件を代入して $20=e^{0.14k}$ より，$k = 21.4$ が得られる（これだけ正しくても 0 点）。

※　R は%と断っているのに，1%を $R = 0.01$ としている人がいました。