テーマ J03：　終端速度の求め方

１．自由落下の式

高校や大学では，図 1 のような自由落下する物体の運動方程式は，

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g \tag{1}$$

で表され，落下速度と落下距離は

$$v=gt+v_0 \tag{2}$$

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0 \tag{3}$$

となることを学習しました．

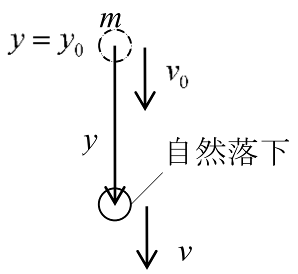

図 1　自由落下

(2)式によれば，落下速度は物体の重さや大きさとは無関係で，単に時間のみの関数となり，時間の増加に伴ってどんどん増加することになります．しかし，実際には空気が存在するために落下速度は空気抵抗の影響を受けることになります．落下速度は無限に増加し続けるのではなく，やがて重力と空気抵抗が平衡して一定速度で落下し続けることになる．その後は等速度運動をします．物体が最終的に到達できる速度は**終端速度**と呼ばれます．

２．空気抵抗を受ける自由落下の式

終端速度を求めるには，空気抵抗を加味した運動方程式を考える必要があります．

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-D \tag{4}$$

ただし，D は抗力です．

速度は

$$v=\frac{dy}{dt} \tag{5}$$

なので，(4)式の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt}=mg-D \tag{6}$$

と書くこともできます．

Newton の抵抗法則から，抗力は次式で表されます．

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 S \tag{7}$$

ただし，C_D は抗力係数，S は物体の面積です．

球の場合，

$$S = \pi r^2$$

球の抗力係数は，レイノルズ数 Re の範囲により異なり，以下のように分けられます．

（注：Re の範囲は C_D 値が連続するようにした参考値です．）

層流領域（$Re < 1$）：　$C_D = \dfrac{24}{Re}$　(8)

遷移領域（$1 \leq Re < 2975$）：　$C_D = \dfrac{24}{\sqrt{Re}}$　(9)

乱流領域（$Re > 2975$）：　$C_D = 0.44$　(10)

ここで，$C_D = \dfrac{24}{Re}$ のとき

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 S = \frac{1}{2}\frac{24}{Re} \rho v^2 S = \frac{1}{2}\frac{24}{\dfrac{2rv\rho}{\mu}} \rho v^2 \pi r^2 = 6\pi \mu r v \tag{11}$$

となります．これを Stokes の法則といいます．一般に，微粒子に適用することができます．

$C_D = \dfrac{24}{\sqrt{Re}}$ のとき

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 S = \frac{1}{2}\frac{24}{\sqrt{Re}} \rho v^2 S = \frac{1}{2}\frac{24}{\sqrt{\dfrac{2rv\rho}{\mu}}} \rho v^2 \pi r^2 = 6\sqrt{2}\pi\sqrt{\rho \mu r^3} v^{\frac{3}{2}} \tag{12}$$

$C_D = 0.44$ のとき

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 S = \frac{1}{2} 0.44 \rho v^2 \pi r^2 = 0.22 \rho \pi r^2 v^2 \tag{13}$$

３．終端速度

3.1　$C_D = \dfrac{24}{Re}$ のとき

(6)式に(11)式を代入すると

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 6\pi\mu\, rv \tag{14}$$

終端速度は，重力と抗力がつり合って，$\dfrac{dv}{dt} = 0$ となった時の速度なので，(14)式より

$$mg - 6\pi\mu\, rv = 0$$

よって

$$v = \frac{mg}{6\pi\mu r} \tag{15}$$

3.2　$C_D = \dfrac{24}{\sqrt{Re}}$ のとき

(6)式に(12)式を代入すると

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 6\sqrt{2}\pi\sqrt{\rho\mu r^3}v^{\frac{3}{2}} \tag{16}$$

終端速度は,

$$mg - 6\sqrt{2}\pi\sqrt{\rho\mu r^3}v^{\frac{3}{2}} = 0$$

より,

$$v = \left(\frac{mg}{6\sqrt{2}\pi\sqrt{\rho\mu r^3}}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{17}$$

3.3　$C_D = 0.44$ のとき

(6)式に(13)式を代入すると

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 0.22\rho\pi r^2 v^2 \tag{18}$$

終端速度は,

$$mg - 0.22\rho\pi r^2 v^2 = 0$$

より,

$$v = \sqrt{\frac{mg}{0.22\rho\pi r^2}} \tag{19}$$

レイノルズ数の範囲に応じて，終端速度の計算式が異なりますが，終端速度が分からないとレイノルズ数も分からないという矛盾が生じます．終端速度を求めるには，まず，(15), (17)，(19)式を用いてすべての速度を計算し，さらにそれぞれの速度に対するレイノルズ数を計算します．レイノルズ数が指定された範囲に適合するものを終端速度とします．

(15)式で計算された速度によるレイノルズ数は $Re < 1$？　yes→(15)式を採用

no

↓

(17)式で計算された速度によるレイノルズ数は $1 \le Re < 2975$ ？　yes→(17)式を採用

no

↓

(19)式で計算された速度によるレイノルズ数は $Re > 2975$ ？　yes→(19)式を採用

まとめ

$Re < 1$ のとき，$v = \dfrac{mg}{6\pi\mu\, r}$

$1 \le Re < 2975$ のとき，$v = \left(\dfrac{mg}{6\sqrt{2}\pi\sqrt{\rho\mu r^3}} \right)^{\frac{2}{3}}$

$Re > 2975$ のとき，$v = \sqrt{\dfrac{mg}{0.22\,\rho\pi r^2}}$

４．速度変化の式

4.1　$C_D = \dfrac{24}{Re}$ のとき

空気抵抗係数を

$$k_1 = 6\pi\mu\, r$$

とおくと，(14)式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k_1 v \tag{20}$$

となります．変数分離して積分すると

$$\frac{1}{\frac{m}{k_1}g - v}dv = \frac{k_1}{m}dt$$

$$\int \frac{1}{\frac{m}{k_1}g - v}dv = \frac{k_1}{m}\int dt$$

$$-\log\left|\frac{m}{k_1}g - v\right| = \frac{k_1}{m}t + c$$

重力と抗力の関係は

$$mg \ge k_1 v$$

さらに，

$$k_1 > 0$$

だから，$\dfrac{m}{k_1}g - v > 0$．よって

$$-\log\left(\frac{m}{k_1}g - v\right) = \frac{k_1}{m}t + c$$

初期条件を $t = 0$ で，$v = 0$ とすると

$$-\log\left(\frac{m}{k_1}g-0\right)=\frac{k_1}{m}\times 0+c \quad \therefore c=-\log\left(\frac{m}{k_1}g\right)$$

$$-\log\left(\frac{m}{k_1}g-v\right)=\frac{k_1}{m}t-\log\left(\frac{m}{k_1}g\right)$$

$$\log\frac{\left(\frac{m}{k_1}g-v\right)}{\left(\frac{m}{k_1}g\right)}=-\frac{k_1}{m}t$$

$$\frac{\left(\frac{m}{k_1}g-v\right)}{\left(\frac{m}{k_1}g\right)}=\exp\left(-\frac{k_1}{m}t\right)$$

よって

$$v=\frac{m}{k_1}g-\left(\frac{m}{k_1}g\right)\exp\left(-\frac{k_1}{m}t\right)=\frac{mg}{k_1}\left\{1-\exp\left(-\frac{k_1}{m}t\right)\right\} \tag{21}$$

終端速度は，時刻が無限大$(t=\infty)$のときの速度です.

$$\lim_{t\to\infty}\exp\left(-\frac{k_1}{m}t\right)=\exp\left(-\frac{k_1}{m}\times\infty\right)=0$$

なので,

$$\lim_{t\to\infty}v=\frac{mg}{k_1}=\frac{mg}{6\pi\mu r}$$

となり，(15)式と同じ結果が得られます.

4.2　$C_D=\dfrac{24}{\sqrt{Re}}$ のとき

　空気抵抗係数を

$$k_2=6\sqrt{2}\pi\sqrt{\rho\mu r^3}$$

とおくと，(16)式は

$$m\frac{dv}{dt}=mg-k_2 v^{\frac{3}{2}} \tag{22}$$

となります．(22)式を変数分離して積分すると

$$\frac{dv}{\frac{m}{k_2}g - v^{\frac{3}{2}}} = \frac{k_2}{m}dt$$

$$\int \frac{dv}{\frac{m}{k_2}g - v^{\frac{3}{2}}} = \frac{k_2}{m}\int dt$$

より，初速度 0 の場合，v に関して次式が得られます．（導出は付録を参照してください）

$$\log \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{mg}{k_2}}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{mg}{k_2}}\sqrt{v} + v^2}{\left(\sqrt[3]{\frac{mg}{k_2}} - \sqrt{v}\right)^2} - \frac{6}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\sqrt[3]{\frac{mg}{k_2}} + 2\sqrt{v}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{mg}{k_2}}} = 3\sqrt[3]{\frac{mg}{k_2}}\,\frac{k_2}{m}t - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

残念ながら左辺の対数関数と三角関数の両方に v が含まれるため，これ以上 v について解くことは不可能です．数値解法を用いる方が簡便です．

4.3　$C_D = 0.44$ のとき

空気抵抗係数を

$$k_3 = 0.22\rho\pi r^2$$

とおくと，(18)式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k_3 v^2 \tag{23}$$

となります．(23)式を変数分離して積分すると

$$\frac{1}{\frac{mg}{k_3} - v^2}dv = \frac{k_3}{m}dt$$

$$\int \frac{1}{\frac{mg}{k_3} - v^2}dv = \frac{k_3}{m}\int dt$$

より

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k_3}}}\log\frac{\sqrt{\frac{mg}{k_3}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k_3}} - v} = \frac{k_3}{m}t + c$$

注．積分公式より

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\log\frac{a-x}{a+x} \quad \left(x^2 < a^2\right) \quad \text{積分定数省略}$$

ここで，積分定数をまとめて c' とすれば

$$\log\frac{\sqrt{\dfrac{mg}{k_3}}+v}{\sqrt{\dfrac{mg}{k_3}}-v}=2\sqrt{\frac{k_3 g}{m}}\,t+c'$$

初期条件を$t=0$で，$v=0$とすると

$$\log\frac{\sqrt{\dfrac{mg}{k_3}}}{\sqrt{\dfrac{mg}{k_3}}}=2\sqrt{\frac{k_3 g}{m}}\times 0+c' \quad \therefore c'=0$$

よって

$$\frac{\sqrt{\dfrac{mg}{k_3}}+v}{\sqrt{\dfrac{mg}{k_3}}-v}=\exp\left(2\sqrt{\frac{k_2 g}{m}}\,t\right)$$

vに関して解くと，

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k_3}}\,\frac{\exp\left(2\sqrt{\dfrac{k_3 g}{m}}\,t\right)-1}{\exp\left(2\sqrt{\dfrac{k_3 g}{m}}\,t\right)+1} \tag{24}$$

さらに，分子分母を$\exp\left(\sqrt{\dfrac{k_2 g}{m}}\,t\right)$で割ると，

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k_2}}\,\frac{\exp\left(\sqrt{\dfrac{k_2 g}{m}}\,t\right)-\exp\left(-\sqrt{\dfrac{k_2 g}{m}}\,t\right)}{\exp\left(\sqrt{\dfrac{k_2 g}{m}}\,t\right)+\exp\left(-\sqrt{\dfrac{k_2 g}{m}}\,t\right)}=\sqrt{\frac{mg}{k_2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{k_2 g}{m}}\,t\right) \tag{25}$$

となります.

時刻が無限大$(t=\infty)$のとき，$\lim_{t\to\infty}\tanh t=1$なので

$$\lim_{t\to\infty}v=\sqrt{\frac{mg}{k_2}}=\sqrt{\frac{mg}{0.22\rho\pi r^2}}$$

となり，(19)式と同じ結果が得られます.

注． $\lim_{t\to\infty}\tanh t=\lim_{t\to\infty}\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{e^t}\left(e^t-e^{-t}\right)}{\frac{1}{e^t}\left(e^t+e^{-t}\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}=\frac{1-0}{1+0}=1$

４．球の空気抵抗の計算方法

球の場合，投影面積（最大の断面積）は

$$S=\pi r^2 \tag{26}$$

となります．球の場合，密度を ρ_s とすると，質量は

$$m=\frac{4}{3}\rho_s\pi r^3 \tag{27}$$

なので，終端速度は,

$Re<1$のとき， $v=\dfrac{mg}{6\pi\mu r}=\dfrac{\frac{4}{3}\rho_s\pi r^3 g}{6\pi\mu r}=\dfrac{2\rho_s r^2 g}{9\mu}$ (28)

$1\le Re<2975$ のとき， $v=\left(\dfrac{mg}{6\sqrt{2}\pi\sqrt{\rho\mu r^3}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{\frac{4}{3}\rho_s\pi r^3 g}{6\sqrt{2}\pi\sqrt{\rho\mu r^3}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{\rho_s g}{9}\sqrt{\dfrac{2r^3}{\rho\mu}}\right)^{\frac{2}{3}}$ (29)

$Re>2975$ のとき， $v=\sqrt{\dfrac{mg}{0.22\rho\pi r^2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{4}{3}\rho_s\pi r^3 g}{0.22\rho\pi r^2}}=\sqrt{\dfrac{200}{33}\dfrac{\rho_s rg}{\rho}}$ (30)

乾燥空気の密度は，理科年表より

$$\sigma=\frac{1.293}{1+0.00367t}\frac{H}{760}\quad[\mathrm{kg/m^3}] \tag{31}$$

ただし，t は気温[℃]，H は気圧[torr=mmHg]
圧力 p[torr=mmHg]の水蒸気を含む空気の密度

$$\sigma_w=\sigma\left(1-0.378\frac{p}{H}\right)\quad[\mathrm{kg/m^3}] \tag{32}$$

空気の粘性係数はいろいろな資料に掲載されており，代表例を下表に示します.

表 1 標準大気圧下の空気の粘性係数（理科年表より）

気温[℃]	粘性係数[$\times 10^{-6}$Pa s]
-25	15.9
0	17.1
25	18.2

50	19.3
75	20.5
100	21.6

計算例．直径が 0.01，0.1mm，1mm，10mm の水滴（球と仮定する）が標準大気圧下で 25℃の空気中を落下するとき，それぞれの終端速度はいくらか？

解答

水の密度は

$$\rho_s = 1000\ [\mathrm{kg/m^3}]$$

(31)式より，乾燥空気の密度は

$$\rho = \frac{1.293}{1+0.00367\times 25}\frac{760}{760} = 1.18\ [\mathrm{kg/m^3}]$$

表 1 より，空気の粘性係数は，$\mu = 18.2\times 10^{-6}$ Pa s

終端速度とレイノルズ数を計算すると

①　直径 0.01㎜ の場合

(28)式：$$v = \frac{2\rho_s r^2 g}{9\mu} = \frac{2\times 1000\times\left(\dfrac{0.01}{2}\times 10^{-3}\right)^2\times 9.81}{9\times 18.2\times 10^{-6}} = 2.99\times 10^{-3}\ \mathrm{m/s}$$

$$Re = \frac{2rv\rho}{\mu} = \frac{2\times\dfrac{0.01}{2}\times 10^{-3}\times 2.99\times 10^{-3}\times 1.18}{18.2\times 10^{-6}} = 1.94\times 10^{-3}$$

(29)式：$$v = \left(\frac{\rho_s g}{9}\sqrt{\frac{2r^3}{\rho\mu}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1000\times 9.81}{9}\times\sqrt{\frac{2\times\left(\dfrac{0.01}{2}\times 10^{-3}\right)^3}{1.18\times 18.2\times 10^{-6}}}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.0240\ \mathrm{m/s}$$

$$Re = \frac{2rv\rho}{\mu} = \frac{2\times\dfrac{0.01}{2}\times 10^{-3}\times 0.0240\times 1.18}{18.2\times 10^{-6}} = 0.0157$$

(30)式：$$v = \sqrt{\frac{200}{33}\frac{\rho_s r g}{\rho}} = \sqrt{\frac{200}{33}\frac{1000\times\left(\dfrac{0.01}{2}\times 10^{-3}\right)\times 9.81}{1.18}} = 0.502\ \mathrm{m/s}$$

$$Re = \frac{2rv\rho}{\mu} = \frac{2\times\dfrac{0.01}{2}\times 10^{-3}\times 0.502\times 1.18}{18.2\times 10^{-6}} = 0.325$$

Re 数の適用範囲との比較から，(28)式から算出した $v = 2.99\times 10^{-3}$ m/s=2.99mm/s（$Re = 1.94\times 10^{-3}$）がふさわしい値と言えます．

②　直径 0.1㎜ の場合

(28)式：$v=\dfrac{2\rho_s r^2 g}{9\mu}=\dfrac{2\times1000\times\left(\dfrac{0.1}{2}\times10^{-3}\right)^2\times9.81}{9\times18.2\times10^{-6}}=0.299\ \mathrm{m/s}$

$$Re=\frac{2rv\rho}{\mu}=\frac{2\times\dfrac{0.1}{2}\times10^{-3}\times0.299\times1.18}{18.2\times10^{-6}}=1.94$$

(29)式：$v=\left(\dfrac{\rho_s g}{9}\sqrt{\dfrac{2r^3}{\rho\mu}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1000\times9.81}{9}\times\sqrt{\dfrac{2\times\left(\dfrac{0.1}{2}\times10^{-3}\right)^3}{1.18\times18.2\times10^{-6}}}\right)^{\frac{2}{3}}=0.240\ \mathrm{m/s}$

$$Re=\frac{2rv\rho}{\mu}=\frac{2\times\dfrac{0.1}{2}\times10^{-3}\times0.240\times1.18}{18.2\times10^{-6}}=1.57$$

(30)式：$v=\sqrt{\dfrac{200}{33}\dfrac{\rho_s rg}{\rho}}=\sqrt{\dfrac{200}{33}\dfrac{1000\times\left(\dfrac{0.1}{2}\times10^{-3}\right)\times9.81}{1.18}}=1.59\ \mathrm{m/s}$

$$Re=\frac{2rv\rho}{\mu}=\frac{2\times\dfrac{0.1}{2}\times10^{-3}\times1.59\times1.18}{18.2\times10^{-6}}=10.3$$

Re 数の適用範囲との比較から，(29)式から算出した $v=0.240\ \mathrm{m/s}$（$Re=1.57$）がふさわしい値と言えます.

③　直径 1㎜ の場合

(28)式：$v=\dfrac{2\rho_s r^2 g}{9\mu}=\dfrac{2\times1000\times\left(\dfrac{1}{2}\times10^{-3}\right)^2\times9.81}{9\times18.2\times10^{-6}}=29.9\ \mathrm{m/s}$

$$Re=\frac{2rv\rho}{\mu}=\frac{2\times\dfrac{1}{2}\times10^{-3}\times29.9\times1.18}{18.2\times10^{-6}}=1940$$

(29)式：$v=\left(\dfrac{\rho_s g}{9}\sqrt{\dfrac{2r^3}{\rho\mu}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1000\times9.81}{9}\times\sqrt{\dfrac{2\times\left(\dfrac{1}{2}\times10^{-3}\right)^3}{1.18\times18.2\times10^{-6}}}\right)^{\frac{2}{3}}=2.40\ \mathrm{m/s}$

$$Re=\frac{2rv\rho}{\mu}=\frac{2\times\dfrac{1}{2}\times10^{-3}\times2.40\times1.18}{18.2\times10^{-6}}=156$$

(30)式： $v=\sqrt{\frac{200}{33}\frac{\rho_s rg}{\rho}}=\sqrt{\frac{200}{33}\frac{1000\times\left(\frac{1}{2}\times10^{-3}\right)\times9.81}{1.18}}=5.02\,\mathrm{m/s}$

$$Re=\frac{2rv\rho}{\mu}=\frac{2\times\frac{1}{2}\times10^{-3}\times5.02\times1.18}{18.2\times10^{-6}}=325$$

Re 数の適用範囲との比較から，(29)式から算出した $v=2.40\,\mathrm{m/s}$（$Re=156$）がふさわしい値と言えます.

④　直径 10mm の場合

(28)式： $v=\frac{2\rho_s r^2 g}{9\mu}=\frac{2\times1000\times\left(\frac{10}{2}\times10^{-3}\right)^2\times9.81}{9\times18.2\times10^{-6}}=2990\ \mathrm{m/s}$

$$Re=\frac{2rv\rho}{\mu}=\frac{2\times\frac{10}{2}\times10^{-3}\times2990\times1.18}{18.2\times10^{-6}}=1940000$$

(29)式： $v=\left(\frac{\rho_s g}{9}\sqrt{\frac{2r^3}{\rho\mu}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1000\times9.81}{9}\times\sqrt{\frac{2\times\left(\frac{10}{2}\times10^{-3}\right)^3}{1.18\times18.2\times10^{-6}}}\right)^{\frac{2}{3}}=24.0\,\mathrm{m/s}$

$$Re=\frac{2rv\rho}{\mu}=\frac{2\times\frac{10}{2}\times10^{-3}\times24.0\times1.18}{18.2\times10^{-6}}=15600$$

(30)式： $v=\sqrt{\frac{200}{33}\frac{\rho_s rg}{\rho}}=\sqrt{\frac{200}{33}\frac{1000\times\left(\frac{10}{2}\times10^{-3}\right)\times9.81}{1.18}}=15.9\,\mathrm{m/s}$

$$Re=\frac{2rv\rho}{\mu}=\frac{2\times\frac{10}{2}\times10^{-3}\times15.9\times1.18}{18.2\times10^{-6}}=10300$$

Re 数の適用範囲との比較から，(30)式から算出した $v=15.9\,\mathrm{m/s}$（$Re=10300$）がふさわしい値と言えます.

付録

$\int\frac{dv}{\frac{m}{k_2}g-v^{\frac{3}{2}}}=\frac{k_2}{m}\int dt$ を解くと，次のようになります.

左辺の積分を

$$I=\int\frac{1}{a^3-v^{\frac{3}{2}}}dv$$

とおきます．ただし

$$a=\sqrt[3]{\frac{m}{k_2}g}$$

$\sqrt{v}=x$ とおくと $v=x^2$，　$dv=2xdx$

よって

$$I=\int\frac{2xdx}{a^3-\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=2\int\frac{x}{a^3-x^3}dx$$
$$=2\int\frac{x}{(a-x)\left(a^2+ax+x^2\right)}dx=\frac{2}{3a}\int\left\{\frac{1}{(a-x)}-\frac{a-x}{\left(a^2+ax+x^2\right)}\right\}dx$$
$$=\frac{2}{3a}\int\left\{\frac{1}{(a-x)}-\frac{-(a+2x)+3a}{2\left(a^2+ax+x^2\right)}\right\}dx=\frac{2}{3a}\int\left\{\frac{1}{(a-x)}+\frac{a+2x}{2\left(a^2+ax+x^2\right)}-\frac{3a}{2\left(a^2+ax+x^2\right)}\right\}dx$$
$$=\frac{2}{3a}\int\frac{1}{a-x}dx+\frac{1}{3a}\int\frac{a+2x}{a^2+ax+x^2}dx-\int\frac{1}{a^2+ax+x^2}dx$$

右辺の各積分は

$$I_1=\int\frac{1}{(a-x)}dx=-\log|a-x|$$

$$I_2=\int\frac{a+2x}{a^2+at+x^2}dx=\log\left(a^2+ax+x^2\right)$$

$$I_3=\int\frac{1}{a^2+ax+x^2}dt=\int\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2}dx=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\tan^{-1}\frac{\frac{a}{2}+x}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2}{\sqrt{3}a}\tan^{-1}\frac{a+2x}{\sqrt{3}a}$$

なので

$$I=-\frac{2}{3a}\log|a-x|+\frac{1}{3a}\log\left(a^2+ax+x^2\right)-\frac{2}{\sqrt{3}a}\tan^{-1}\frac{a+2x}{\sqrt{3}a}$$
$$=-\frac{1}{3a}\log(a-x)^2+\frac{1}{3a}\log\left(a^2+ax+x^2\right)-\frac{2}{\sqrt{3}a}\tan^{-1}\frac{a+2x}{\sqrt{3}a}$$
$$=\frac{1}{3a}\log\frac{a^2+ax+x^2}{(a-x)^2}-\frac{2}{\sqrt{3}a}\tan^{-1}\frac{a+2x}{\sqrt{3}a}$$

$x=\sqrt{v}$ を代入すると

$$I=\frac{2}{3a}I_1+\frac{1}{3a}I_2-I_3=\frac{1}{3a}\log\frac{a^2+a\sqrt{v}+v^2}{\left(a-\sqrt{v}\right)^2}-\frac{2}{\sqrt{3}a}\tan^{-1}\frac{a+2\sqrt{v}}{\sqrt{3}a}$$

さらに $a=\sqrt[3]{\dfrac{m}{k_2}g}$ を代入すると

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}\log\frac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}\right)^2+\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}\sqrt{v}+v^2}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}-\sqrt{v}\right)^2}-\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}\tan^{-1}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}+2\sqrt{v}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}=\frac{k_2}{m}t+c$$

初期条件，$t=0$ で $v=0$ を代入すると，積分定数は

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}\log\frac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}\right)^2}-\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}\tan^{-1}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}\log 1-\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}\times 0-\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}\frac{\pi}{6}=c$$

より

$$c=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}$$

と決定されます．よって

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}\log\frac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}\right)^2+\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}\sqrt{v}+v^2}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}-\sqrt{v}\right)^2}-\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{m}{k_2}g}}\tan^{-1}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{m}{k_2}g}+2\sqrt{v}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{m}{k_2}g}}=\frac{k_2}{m}t-\frac{\pi}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{m}{k_2}g}}$$

$$\log\frac{\left(\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}\right)^2+\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}\sqrt{v}+v^2}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}-\sqrt{v}\right)^2}-\frac{6}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}+2\sqrt{v}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\dfrac{mg}{k_2}}}=3\sqrt[3]{\frac{mg}{k_2}}\frac{k_2}{m}t-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

となります．

http://www.sit.ac.jp/user/konishi/JPN/L_Support/SupportPDF/TerminalVelocity.pdf

---