

簡単な折り紙としてのフラクタル矩形

根岸利一郎, 関口久美子,
 埼玉工業大学, 埼玉県深谷市普濟寺 1690
 negishi@sit.ac.jp

Fractal rectangles formed with the easy Origami steps

Riichirou Negishi, Kumiko Sekiguchi

Saitama Institute of Technology, 1690 Fusaiji, Fukaya, Saitama, Japan, 369-0295

Abstract: Similar rectangles are continuously made with suitable partition rule using a golden rectangle. Self-similar figures can be made from all the rectangles, but the number of similar rectangles formed through folding paper is not many. This paper reports analysis of the results obtained about folding similar rectangles within 3 steps.

Keywords: Fractal rectangle, Origami, Self-similar, Golden rectangle

自己相似矩形に特別があるか

矩形の短辺と長辺の比が黄金比になる長方形は黄金長方形^[1]と言われる。この矩形は長辺を黄金比に分ける線で分割すると、出来た一方の矩形は元の矩形と相似になる。その相似矩形を同じ方法で分割してできる矩形はまた元の矩形と相似になる。この同じ操作の繰り返しで自己相似なフラクタル構造の矩形を作れる。長辺が短辺の $\sqrt{2}$ 倍の長方形はシルバー長方形であり、相似矩形は長辺を2分するという最も簡単な方法で作れる。この黄金長方形やシルバー長方形は自己相似矩形として特別な型かどうか折り紙で検討したい。

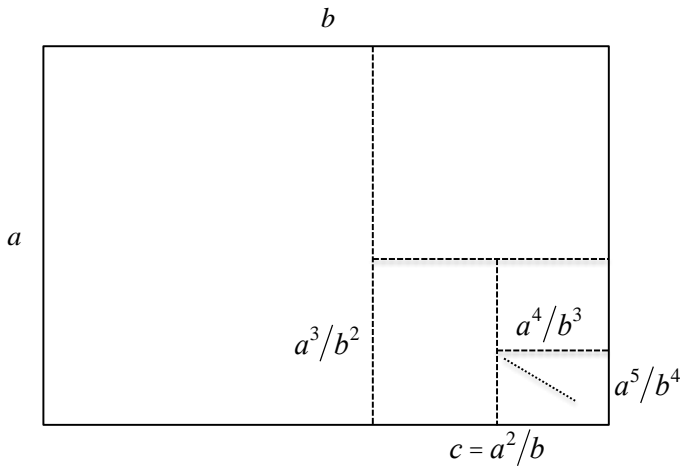


図.1 相似矩形のモデル

図1のように縦を a 、横を b とする $a < b$ の任意の矩形から相似形を作る場合、破線で作られる相似矩形の短い辺を c とすると出来た矩形が元の矩形と相似形だとすれば、 $a:b$ の比が $c:a$ に等しい。相似矩形の c は $a(a/b)$ となる。 a が長辺で c が短辺となる次の相似矩形の短辺は $a(a^2/b^2)$ であり、その次は $a(a^2/b^2)$ 、そして $a(a^3/b^3)$ 、 $a(a^4/b^4)$ … と自己相似矩形が続く。条件を満足する矩形は a を決めた後で b を適当に選

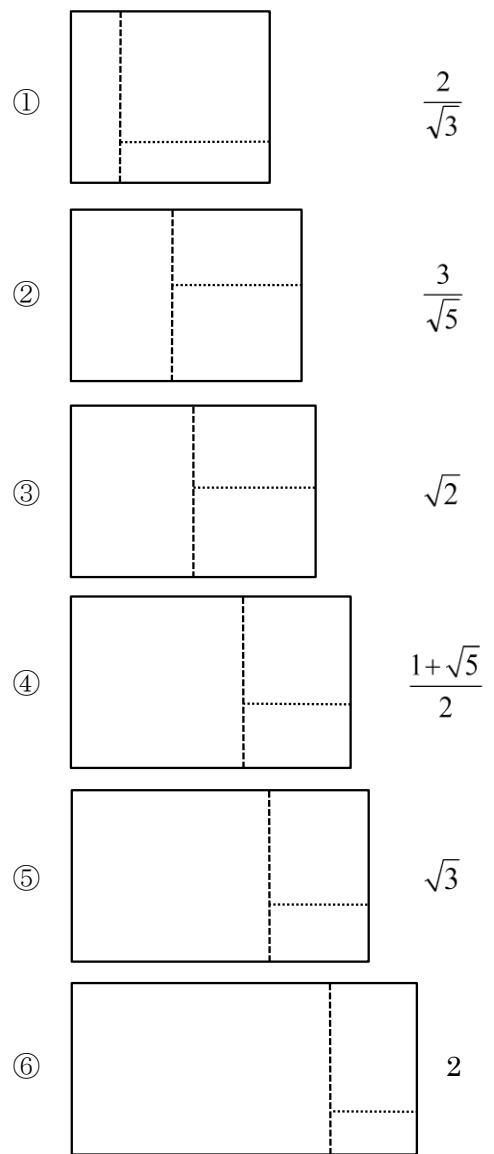


図 2 比較的簡単な比の自己相似矩形の例。各図右の数値は元図の短辺を 1 としたときの長辺の長さを示す。

べばよいので、限りなくある。 a を 1 とする相似矩形は $bc=1$ となる図形すべてとなり、特別な相似矩形はない。その条件を満足する中から比較的簡単な比の型をいくつか選ぶと図 2 のようになる。

折り紙で作る自己相似矩形

折り紙として相似矩形を折る場合は全てが簡単に折れるわけではない。折り紙では、一般に正方形が使われるが、ここでは自己相似形を作る観点から $a=1$ の矩形を検討する。矩形を連続して折って相似形を作るには長辺に対応する相似矩形の条件を満足する位置を決めて折る必要がある。

最も簡単に相似矩形が作れるのは③のシルバー長方形であり、長辺を半分に 1 回折るだけで作れる。

2 回折りの相似矩形に④の黄金長方形がある。この矩形は短辺が正方形の辺を作るように折る対角線の 1 回と、決めた位置で短辺に平行に折る 1 回の 2 回折りで作れる。この作られた矩形の短辺に対する長辺の比はやはり黄金比の $(\sqrt{5}-1)/2$ となる。2 回折るといっただけなら、①と⑥は共に長辺を半分の半分に折る方法で相似形が作れる。⑤も図 3 のように矩形の左下端を右上端に合わせて折る 1 回とその折線と下長辺の交点で短辺に平行に折る 2 回になる。

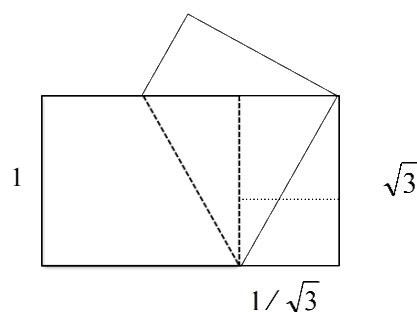


図 3 2 回折りで自己相似矩形

3 回折り相似矩形

3 回折りで相似形を作る簡単な折り方には長辺を半分の半分の半分に折る方法がある。その場合の元の矩形の長辺は $\sqrt{8/7}$ か $2\sqrt{2}$ にすればよい。他に 3 回折りで作れる相似矩形にはどんな型があるか？ b が $\sqrt{7}/2$ の図 4 上の例では、最初に短辺を半分に折り、右辺の一方の端を左辺の midpoint に合わせて折る。折線と左辺に近い長辺との交点で短辺に平行に折る。この 3 回折で相似矩形を作れる。3/2 の図 4 中では、短辺を半分に折った後上の例とは逆に左辺の一端を右辺の midpoint に合わせて折る。その折線と右辺に近い長辺との交点で短辺に平行に折ることで作れる。これらの自己相似形の折り方は芳賀定理^[2]を矩形に適用して求めることができる。図 4 下の例は b が $1+1/\sqrt{2}=1.707\dots$ の場合である。この場合は元の矩形から相似矩形を作る側で正方形を作るように対角線を山折りにする。その山折線と上長辺との交点で山折線を短辺に平行に直角の四分の一になるように折る。その四分の一折線と下長辺との交点で短辺に平行に折る。この 3 回折りで自己相似矩形を作れる。②は長辺を $(\sqrt{5}/3)^2$ の 5/9 の位置で折る必要があり少なくとも 7 回は折る必要がある。

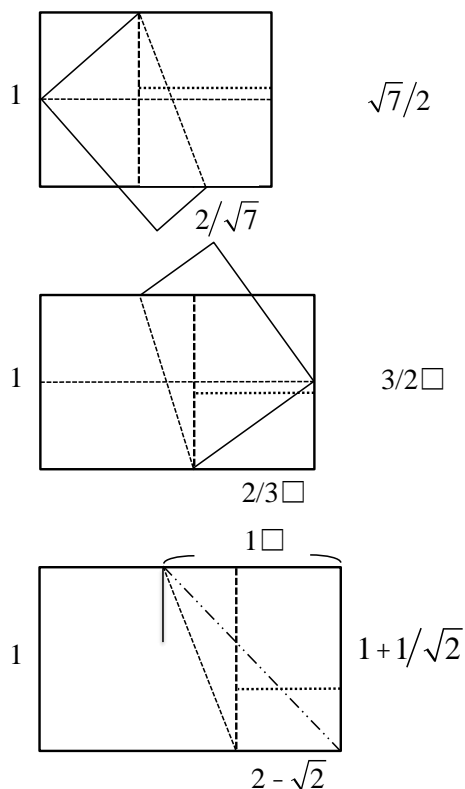


図 4 3 回折りで自己相似矩形になる例. 右側の数値は元図の短辺を 1 としたときの長辺の長さ。

最も簡単に作れる自己相似矩形は長辺を半分に 1 回折ることで作れるシルバー長方形であり、用紙の A 版・B 版や書籍として普及している。長辺が $2/\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 2 の場合の自己相似矩形は 2 回折りで作れ、黄金長方形との折数での差異はない。3 回折りで作れる自己相似矩形の中で、長辺が 3/2 の矩形は元の型が正確に作れるという利点がある。これらの検討結果を報告する。

[1] 例えば R. A. Dunlap(2006): “The Golden Ratio and Fibonacci Numbers”, World Scientific Publishing, Singapore.

[2] 芳賀和夫(1999): 「オリガミクス 1 幾何図形折り紙」, 日本評論社.